

BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 2, 2021

Bakı – 2021

RİYAZİYYAT

УДК 517.583.53

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

¹С.С.МИРЗОЕВ, ^{1,2}Г.А.АГАЕВА¹Бакинский Государственный Университет²Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

mirzoevsabir@mail.ru

gulsumm_agayeva@mail.ru

В работе исследована разрешимость одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в конечной области. Указана связь разрешимости краевой задачи с операторными коэффициентами. Получены теоремы о нормах промежуточных производных и доказана их связь с разрешимости данной краевой задачи. Все условия разрешимости выражены только свойствами коэффициентов данного уравнения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнения, краевая задача, регулярная разрешимость.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – нормальный обратимый оператор спектро которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \pi/2\}$$

Предложем, что число μ_k ($k = 1, 2, \dots$) есть ортонормированные собственные векторы отвечающих собственным значениям μ_k , т.е. $Ae_k = \mu_k e_k$, $k = 1, 2, \dots$, где

$$(e_n, e_m) = \delta_{n,m} \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \mu_k = |\mu_k| e^{i\varphi_k}, \text{ где } \varphi_k \in S_\varepsilon.$$

Тогда оператор A – можно представить в виде $A = UC$, где $Cx = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| (x, e_k) e_k$, $x \in D(A)$ а $U = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\varphi_k} (x, e_k) e_k$. Очевидно, что C – положительно определенный оператор а U – унитарный оператор в H .

Пусть H_γ ($\gamma \geq 0$) есть гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y) = (C_x^\gamma, C_y^\gamma)$, при $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$

Пусть $L_2((0,1):H)$ есть в гильбертово пространство функций $f(t)$ определённые в $(0,1)$ почти всюду со значениями в H с нормой

$$\|f\|_{L_2((0,1);H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Следуя монографию [1] введем гильбертово пространство

$$W_2^2((0,1):H) = \{u : u'' \in L_2((0,1):H), C^2u \in L_2((0,1):H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2((0,1);H)} = (\|u''\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|C^2u\|_{L_2((0,1);H)}^2)^{1/2}$$

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории распределений. Из теоремы о следах [1] следует, что

$$\overset{\circ}{W}_2^2((0,1):H) = \{u \mid u \in W_2^2((0,1):H), u(0) = 0, u(1) = 0\}$$

есть полное гильбертово пространство.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$Pu = -u''(t) + \rho(t)A^2u(t) + A_0u'' + A_1u'(t) + A_2u(t) = f(t) \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (2)$$

где $f(t), u(t)$ функции со значениями в H , а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

- 1) A -нормальный обратимый оператор спектор которого содержится в угловом секторе $S_\varepsilon \leq 0 < \varepsilon \leq \pi/2$, причем A^{-1} вполне непрерывный оператор в H ;
- 2) $\rho(t)$ -числовая действительная, измеримая функция определённая в интервале $(0,1)$, причем $0 \leq \alpha < \rho(t) \leq \beta < \infty$;
- 3) Операторы $B_j = A_j A^{-j}$ ($j = 0,1,2$) ограничены в H .

Рассмотрим в пространстве $L_2((0,1);H)$ операторы Φ_0 , где

$$\Phi_0 u = -u''(t) + \rho A^2 u(t)$$

с областью определения $D(\Phi_0) = \overset{\circ}{W}_2^2((0,1):H)$

и

$$\Phi_0^* u = -u''(t) + \rho A^{*2} u(t)$$

с областью определения $D(\Phi_0^*) = D(\Phi) = \overset{\circ}{W}_2^2((0,1):H)$.

Далее в $W_2^2((0,1); H) = D(L_0)$ определим оператор $\Phi_1 = A_0 u'' + A_1 u' + A_2 u$.

Очевидно, что Φ_1 есть ограниченный оператор из $W_2^2((0,1); H) = D(L_0)$ в $L_2((0,1); H)$.

Определение. Если при любом $f(t) \in W_2^2((0,1); H)$ существует $u(t) \in L_2((0,1); H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в интервале $(0,1)$, граничным условиям (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t)\|_{3/2} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} \|u(t)\|_{3/2} \leq 0,$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^2((0,1); H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0,1); H)},$$

то будем говорить, что задача (1),(2), регулярно разрешима.

Отметим, что регулярно разрешимость некоторых краевых задач для уравнения (1) с самосопряженным оператором A на конечном области исследованы в работах [2-6].

Когда A -нормальный оператор $A_0 = 0$ и $\rho(t) = 1$ краевая задача исследована в работе [7]. В бесконечной области при $A_0 = 0$, $\rho(t) = \alpha$ $t \in (0, t_0)$ и $\rho(t) = \beta$ $t \in (t_0, \infty)$ более общая задача исследована в работе [8].

Следующая лемма показывает, что почему спектр оператора находится в секторе S_ε , $0 < \varepsilon \leq \pi/2$

Лемма. Пусть e^{-At} есть полугруппе ограниченных операторов действующих в H . Тогда вектор функция $u_0(t) = e^{-At} \varphi$ принадлежит в пространстве $W_2^2((0,1); H)$, тогда и только тогда $\varphi \in H_{3/2}$.

Доказательство. Из теоремы о следах [1] следует, что $u_0(0) = \varphi \in H_{3/2}$, поскольку $u_0(t) \in W_2^2(R+; H)$. Теперь покажем, что при $\varphi \in H_{3/2}$ $u(t) \in W_2^2((0,1); H)$.

Если $\varphi \in H_{3/2}$, то существует вектор $x \in H$, такой, что $C\varphi = x$.

Тогда

$$\|u\|_{W_2^2((0,1); H)} = 2 \|C^2 e^{-At} \varphi\|_{L_2((0,1); H)}^2 = 2 \|C^{1/2} e^{-At} x\|_{L_2((0,1); H)}^2.$$

Далее исследуя спектральные разложения оператор A получаем

$$\begin{aligned}
& \| C^{1/2} e^{-At} x \|_{L_2((0,1);H)}^2 = (C^{1/2} e^{-At} x, C^{1/2} e^{-At} x)_{L_2((0,1);H)} = \\
& = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^{1/2} (e^{-|\mu_k| i \varphi_k t} (x, e_k), \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^{1/2} (e^{-|\mu_k| i \varphi_k t}, x, e_k)) dt = \\
& = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| e^{-2|\mu_k| \cos \varphi_k t} |(x, e_k)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \cos \varphi_k} + e^{-2|\mu_k| \cos \varphi_k} \right) \|x\|^2 \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cos \varepsilon} + 1 \|x\|^2 = \left(\frac{1}{2 \cos \varepsilon} + 1 \right) \|\varphi\|_{3/2}^2
\end{aligned}$$

Следовательно, при $0 < \varepsilon \leq \pi/2$ и $\varphi \in H_{3/2}$ функция $u_0(t) = e^{-At} \varphi \in W_2^2((0,1); H)$.

Основные неравенства

Имеет место

Теорема 1. Пусть выполняется условия 1) Тогда при все $u \in W_2^2((0,1); H)$ имеет место неравенство

$$\| Au' \|_{L_2((0,1);H)} \leq d_1(\varepsilon; \alpha, \beta) \| \Phi_0 u \|_{L_2((0,1);H)} \quad (3)$$

$$\| A^2 u \|_{L_2((0,1);H)} \leq d_0(\varepsilon; \alpha; \beta) \| \Phi_0 u \|_{L_2((0,1);H)} \quad (4)$$

$$\| u'' \|_{L_2((0,1);H)} \leq d_2(\varepsilon; \alpha; \beta) \| \Phi_0 \|_{L_2((0,1);H)}, \quad (5)$$

где $d_1(\varepsilon; \alpha; \beta) = \alpha^{-1/2} \frac{1}{2 \cos \varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leq \pi/4$

$$d_0(\varepsilon; \alpha; \beta) = \begin{cases} \alpha^{-1}, & 0 \leq \varepsilon \leq \pi/4 \\ \alpha^{-1} \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varepsilon}, & \pi/4 \leq \varepsilon \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$d_2(\varepsilon; \alpha; \beta) = \begin{cases} \beta^{1/2} \alpha^{-1/2}, & 0 \leq \varepsilon \leq \pi/4 \\ \beta^{1/2} \alpha^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varepsilon}, & \pi/4 \leq \varepsilon \leq \pi/2 \end{cases}$$

Доказательство. Умножим уравнение $\Phi_0 u = f$ в функцию $\rho^{1/2}(t)$.

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \|\rho^{-1/2}\Phi_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 &= \|\rho^{-1/2}u'' + \rho^{1/2}A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 = \|\rho^{-1/2}u''\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \\ &+ \|\rho^{1/2}A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 - 2\operatorname{Re}(u'', A^2 u)_{L_2(R_+;H)} \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что $u \in D(\Phi^0)$ ($u(0) = u(1) = 0$) интегрируя по частям а затем применяя спектральную разложению оператора A получаем

$$-2\operatorname{Re}(u'', A^2 u)_{L_2((0,1);H)} = 2\operatorname{Re}(A^* u', Au')_{L_2((0,1);H)} \geq 2\cos 2\varepsilon \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2.$$

Таким образом учитывая это неравенство в равенство (6) имеем:

$$\begin{aligned} \|\rho^{-1/2}\Phi_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 &\geq \|\rho^{-1/2}u''\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \\ \|\rho^{1/2}A^2 u\|_{L_2(R_+;H)}^2 &+ 2\cos 2\varepsilon (A^2 u')_{L_2((0,1);H)} \end{aligned} \quad (7)$$

Сдругой стороны

$$\|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 = \|Cu'\|_{L_2((0,1);H)}^2 = (Cu', Cu')_{L_2((0,1);H)}$$

$$\begin{aligned} Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 &= -(C^2 u, u'')_{L_2((0,1);H)} = (\rho^{1/2}C^2 u, \rho^{1/2}u'')_{L_2((0,1);H)} \leq \\ &\leq \|\rho^{1/2}C^2 u\|_{L_2((0,1);H)} \|\rho^{-1/2}u''\|_{L_2((0,1);H)} \leq \frac{1}{2}(\|\rho^{1/2}C^2 u\|_{L_2((0,1);H)} + \|\rho^{-1/2}u''\|_{L_2((0,1);H)}^2) \end{aligned}$$

Из неравенство (7)следует, что

$$\frac{1}{2}\|\rho^{1/2}C^2 u\|_{L_2((0,1);H)} + \|\rho^{-1/2}u''\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq \frac{1}{2}\|\rho^{1/2}\Phi_0 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 - \cos 2\varepsilon \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2$$

Таким образом

$$(1 + \cos 2\varepsilon) \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq \frac{1}{2} \|\rho^{-1/2}\Phi_0 u\|_{L_2(R_+;H)}^2$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \|Au'\|_{L_2((0,1);H)} &\leq \frac{1}{2\cos \varepsilon} \|\rho^{-1/2}\Phi_0 u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \alpha^{-1/2} \frac{1}{2\cos \varepsilon} \|\Phi_0 u\|_{L_2((0,1);H)}, \\ 0 &< \varepsilon \leq \pi/2. \end{aligned}$$

т.е. неравенство (3) доказана.

Тепер докажем остальные неравенство.

Предположим что $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$, тогда $\cos 2\varepsilon \geq 0$. Поэтому из неравенство (7) следует, что

$$\|\rho^{-1/2}u''\|_{L_2((0,1);H)} \leq \|\rho^{1/2}\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}$$

тогда

$$\|u''\|_{L_2((0,1);H)} = \|\rho^{1/2}\rho^{-1/2}u''\|_{L_2((0,1);H)} \leq \beta^{1/2} \|\rho^{1/2}\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \beta^{1/2}\alpha^{-1/2} \|\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}$$

Аналогично имеем

$$\|\rho^{1/2}A^2u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \|\rho^{-1/2}\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}$$

т.е.

$$\|A^2u\|_{L_2((0,1);H)} = \|\rho^{-1/2}\rho^{1/2}A^2u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \alpha^{-1/2} \|\rho^{-1/2}\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \alpha^{-1} \|\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}$$

Таким образом неравенство (4) и (5) при $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$ доказано.

Теперь считаем, что $\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда $\cos 2\varepsilon \leq 0$. В этом случае из неравенство (7) с учетом неравенство (3) имеем:

$$\begin{aligned} & \|\rho^{1/2}u''\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|\rho^{1/2}A^2u\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq \|\rho^{-1/2}\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}^2 - 2\cos 2\varepsilon \|Au'\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq \\ & \leq \|\rho^{-1/2}\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}^2 - \alpha^{-1} \frac{2\cos 2\varepsilon}{4\cos^2 \varepsilon} \|\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq (\alpha^{-1} - \alpha^{-1} \frac{\cos 2\varepsilon}{2\cos^2 \varepsilon}) \|\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}^2 = \\ & = \alpha^{-1} \frac{1}{2\cos^2 \varepsilon} \|\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}^2 \end{aligned}$$

Следовательно

$$\|\rho^{1/2}A^2u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \alpha^{-1} \frac{1}{2\cos^2 \varepsilon} \|\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}^2$$

и

$$\|\rho^{1/2}u''\|_{L_2((0,1);H)} \leq \alpha^{-1} \frac{1}{2\cos^2 \varepsilon} \|\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)}^2$$

Следовательно при $\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} \|A^2u\|_{L_2((0,1);H)} &= \|\rho^{-1/2}\rho^{1/2}A^2u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \alpha^{-1/2}\alpha^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2}\cos \varepsilon} \|\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)} = \\ &= \alpha^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}\cos \varepsilon} \|\Phi_0u\|_{L_2((0,1);H)} \end{aligned}$$

и

$$\|u''\|_{L_2((0,1);H)} \leq \| \rho^{-1/2} \rho^{1/2} u'' \|_{L_2((0,1);H)} \leq \beta^{1/2} \alpha^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varepsilon} \| \Phi_0 u \|_{L_2((0,1);H)}$$

Следовательно, равенство (4) и (5) также доказаны.

Из неравенства 3)-5) получается следующие следствия:

$$\|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)} = d_1(\varepsilon; \alpha; \beta) \| \Phi_0^* u \|_{L_2((0,1);H)},$$

$$\|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)} = d_0(\varepsilon; \alpha; \beta) \| \Phi_0^* u \|_{L_2((0,1);H)},$$

$$\|u''\|_{L_2((0,1);H)} = d_{21}(\varepsilon; \alpha; \beta) \| \Phi_0^* u \|_{L_2((0,1);H)},$$

где числа $d_1(\varepsilon; \alpha; \beta)$, $d_0(\varepsilon; \alpha; \beta)$, $d_2(\varepsilon; \alpha; \beta)$ определены из неравенство 3)-5).

Доказательство следует из того что оператор A^* также имеет все свойства оператор A поэтому сделая аналогические вклады получаем утверждение следствия.

Основные результаты

Имеет место следующая

Теорема 2. Оператор Φ_0 изоморфно отображает $D(\Phi_0) = \overset{\circ}{W}_2^2((0,1):H)$ на $L_2(R+:H)$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что если $\Phi_0 u = 0$, то $u = 0$, т.е $Ker \Phi_0 = \{0\}$

Аналогично получаем что, $Ker \Phi_0^* = \{0\}$. Тогда $Im \Phi_0$ всюду плотно в $L_2((0,1):H)$.

С другой стороны, очевидно, что $\| \Phi_0 u \|_{L_2((0,1);H)}^2 \geq const \| u \|_{W_2^2((0,1);H)}^2$

Поскольку $\| \Phi_0 u \|_{L_2((0,1);H)} \leq \sqrt{2} \| u \|_{W_2^2((R+:H))}$, то по теореме Банаха об обратном операторе получаем, что утверждение теоремы верно. Теорема доказана.

Тепер докажем основную теоремы.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1)-3) и имеет место неравенство

$$q(\varepsilon; \alpha; \beta) = d_2(\varepsilon; \alpha; \beta) \| B_0 \| + d_1(\varepsilon; \alpha; \beta) \| B_1 \| + d_0(\varepsilon; \alpha; \beta) \| B_2 \| < 1$$

то задача (1), (2) регулярно разрешимо, где число $d_0(\varepsilon; \alpha; \beta)$, $d_1(\varepsilon; \alpha; \beta)$, $d_2(\varepsilon; \alpha; \beta)$ определены из неравенство 3)-5).

Доказательство. Напишем задачу (1),(2) в виде $\Phi_0 u + \Phi_1 u = f$, где

$u \in D(L_0) = \overset{\circ}{W}_2^2((0,1):H)$, $f \in L_2((0,1):H)$. Из теоремы 1 следует, что для

любого $v \in L_2((0,1):H)$ существует $u \in D(L_0) = \overset{\circ}{W}_2^2((0,1):H)$, такое, что

$\Phi_0 u = v$. Тогда получаем уравнению $v = \Phi_1 \Phi_0^{-1} v = f$ в пространстве $L_2((0,1); H)$. Так как при любом $v \in L_2((0,1); H)$.

$$\|\Phi_1 \Phi_0^{-1} v\|_{L_2((0,1); H)} = \|\Phi_1 u\|_{L_2((0,1); H)} \leq \sum_{j=0}^2 \|A_{2-j} u^{(j)}\|_{L_2((0,1); H)} \leq \sum_{j=0}^2 \|B_{2-j}\| \|A^{2-j} u^{(j)}\|_{L_2((0,1); H)}$$

Учитывая неравенство (3)-(4) из теоремы 1 получаем, что

$$\|\Phi_1 \Phi_0^{-1} v\|_{L_2((0,1); H)} \leq \sum_{j=0}^2 \|B_{2-j} d_j(\varepsilon; \alpha; \beta)\| \|\Phi_0 u\|_{L_2((0,1); H)} = q(\varepsilon; \alpha; \beta) \|v\|_{L_2((0,1); H)}$$

Так как, $0 < q(\varepsilon; \alpha; \beta) < 1$, то $v = (E + \Phi_1 \Phi_0^{-1})^{-1} f$ а $u \in \Phi_0^{-1} (E + \Phi_1 \Phi_0^{-1})^{-1} f$.

Отсюда

имеет, что $\|u\|_{W_2(0,1); H} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0,1); H)}$. Теорема доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженс Э. Неоднородные граничные задачи и их приминения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Mirzoyev S.S., Agayeva G.A. Correct Solvability of One Boundary Value Problem for the Differential Equation of the Second Order on Hilbert Space //Appl.Mathemat.Science, v7, No79, 2013, p.3935-3945//
3. Mirzoyev S.S., Agayeva G.A. On the Solvability Conditions of one Baoundary Value Problemfor the second Order Differential Equation with Operator Coefficients/Int.Jour. of Math.and Computer Science, v.8, No4, 2014, p.149-156.//
4. Agayeva G.A. On the existence and uniqueness of the generalized soultion of a boundary value problem for second order operator-differential equations/ TRANSACTIONS of NAS of Azerbaijan, 2014, vol. XXXIV, No 4, pp.3-8.
5. Агаева Г.А. О разрешимости одной краевой задачи для эллиптических операторно-дифференциальных уравнений с операторным коэффициентом в краевом условии// Вестник Бакинского Университета, 2015, No1, с.37-42.
6. Агаева Г.А. Об одной краевой задаче для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка//Известия педагогического универстета, 2017, No3,с. 9-17.//
7. Мирзоев С.С., Карааслан М.Д., Гумбаталиев Р.З. К теории операторно-дифференциальных уравнений уравнений второгопорядка // Докл.РАН, 2013, т.453, No6, с.610-612.
8. Мирзоев С.С.,Алиев А.А., Гасымова Г.М. Условия разрешимости одной краевой задачи с операторными коэффициентами и связаные с ними оценки норм операторов промужоточных производных.// Докл.РАН , 2016, т.470, No5, с.511-513.

İKİTƏRTİBLİ ELLİPTİK TİP OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

S.S.MİRZƏYEV, G.A.AĞAYEVA

XÜLASƏ

İşdə sonlu oblastda ikitərtibli operator-diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin həll olunması aradırılmışdır. Sərhəd məsələsinin həll olunma şərtləri və operator əmsallar arasında əlaqə tapılmışdır.

Aralıq törəmə operatorlarının normaları haqqında teorem isbat edilmiş və onların həll olunma şərtləri ilə əlaqəsi göstərilmişdir. Bütün həll olunma şərtləri verilmiş tənliyin operator əmsallarının xassələri ilə ifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator-diferensial tənliklər, sərhəd məsələsi, requlyar həll olunma.

SOLVABILITY ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM ELLIPTIC OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

S.S.MİRZƏYEV, G.A.AGAYEVA

SUMMARY

In this paper investigates solvability of some boundary-value problem for second order differential equations of elliptic type on the finite interval. The proved theorems of the norm of intermediate derivativs. Their relation with solvability conditions of the considered value problems.

All obtained results were expressed by the properties of the coefficients of operator-differential equations.

Keywords: Hilbert spaces, operator-differential equations, boundary-value problem, requlyar solvability.

УДК 305.397

**О СИСТЕМНОМ ПОДХОДЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ СИТУАЦИЙ****Р.М.КУЛИЕВ, Ф.А.МИРЗОЕВ**

Настоящая работа посвящена обсуждению основных принципов моделирования управленческой деятельности в условиях неопределенности ситуаций. Особо было отмечено что, теория нечетких множеств, как довольно новое направление прикладной математики, связанное с именем видного математика современности Л.А.Заде, является одной из бурно развивающихся теорией в современной науке. Это обусловлено удачным применением этой теории в современных направлениях науки и техники, таких, как проблемы искусственного интеллекта, принятие решений и управления, распознавания и диагностики. С другой стороны, многие задачи эколого-экономического характера, такие, как проблемы охраны окружающей среды, сохранения ресурсов и другие, сводятся к моделированию (в настоящее время трудно найти область человеческой деятельности, в которой не использовались бы методы моделирования) соответствующих оптимизационных процессов, в которых тесно переплетены разнородные неопределенные переменные.

Ключевые слова: неопределенность, принятия решений, теория нечетких множеств, инвестиционный проект, системный научный подход, экологический фактор.

В экономике и управлении приходится принимать решения в условиях неопределенности, например, экономического окружения, состояний финансовых активов и т.п. Для предопределения неопределенности и минимизации риска неэффективного управления используется разные подходы. Исторически первым и наиболее распространенным является вероятностный подход учета неопределенности. Но его применение не всегда корректно, поскольку требует статической однородности случайных событий и знания закона распределения. Другой подход использует минимаксный принцип, т.е. выбор наименее плохого из самых хороших сценариев. Но их ожидаемость часто низка и требует не всегда оправданных затрат.

Современные разработки по принятию решений в условиях неопределенностей в основном связаны с приложением теории нечетких множеств. Нечетко-множественные модели, зачастую представленные в виде программного обеспечения для персональных компьютеров, позволяют как менеджерам различного уровня, так и собственникам предприятий принимать экономически грамотные решения.

Отметим, что для подавляющего большинства человеческих реше-

ний нельзя точно рассчитать и оценить последствия. Можно лишь предположить, что определенный вариант решения приведет к наилучшему результату. Однако такое предположение может оказаться ошибочным, потому что никто не может заглянуть в будущее и узнать все наверняка. С другой стороны, человеческие решения являются исключительно важным для практики и интересным для науки объектом исследования. Уступая компьютеру в скорости и точности вычислений, человек тем не менее обладает уникальным умением быстро оценивать обстановку, выделять главное и отбрасывать второстепенное, соизмерять противоречивые оценки, выполнять неопределенность своими догадками. Эти ценные качества спасали людей на всем протяжении человеческой истории. Как человек принимает решение, почему одни преуспевают там, где другие терпят неудачи, во всем этом следует разобраться. Следовательно, принятие решения есть постоянно решаемая в процессе управления задача.

Задача принятия решений направлена на определение наилучшего (оптимального) способа действий для достижения поставленных целей. Под целью понимается идеальное представление желаемого состояния или результата деятельности. Если фактическое состояние не соответствует желаемому, то имеет место проблема. Выработка плана действий по устранению проблемы составляет сущность задачи принятия решений.

Проблема всегда связана с определенными условиями, которые обобщенно называют ситуациями. Совокупность проблемы и ситуации образует проблемную ситуацию. В условиях неопределенности различного рода (вероятностного, неточного, нечеткого и т.п.) проблемная ситуация определена не полностью. Неопределенность может быть обусловлена различными факторами, например, неизвестностью спроса на продукцию, неясностью в возможностях использования научно-технических достижений и другими принципами. В качестве примера рассмотрим задачу принятия инвестиционного решения в условиях неопределенности (см. напр. [1]).

Известно, что под инвестицией понимается как долговременный отказ экономического субъекта от потребления имеющихся ресурсов (обычно капитала) и долгосрочное вложение их в производственную или другую сферу деятельности с целью производства товаров и услуг для получения прибыли и увеличения в будущем своего благосостояния или достижения социальных результатов (решения экологических, медицинских и других проблем).

Инвестиционным проектом, как известно, называется план или программа мероприятий по осуществлению капитальных вложений для последующего возмещения: получение прибыли или достижение социальных и т.п. результатов.

При информационной неопределенности существует риск инвестиционного проекта. Информационная неопределенность в отношении будущего

го состояния рынка не позволяет учесть в инвестиционном проекте динамику цен и объемов реализуемой продукции, сырья и материалов, политической ситуации, действий конкурентов, погодных и других условий.

Применение научно-системного подхода в процессах принятия рациональных решений

Проблемы принятия решений в условиях неопределенности очень разнообразны и по своей сложности значительно превосходят подобные задачи в детерминированном (т.е. в отсутствии неопределенности) случае.

Для формализации большинства задач теория принятия решений в условиях стохастической неопределенности, как правило, используется теория вероятностей, а также разработанные на ее основе теория статистических решений и массового обслуживания.

Успешное применение математических методов для анализа многих прикладных задач с неточными параметрами может выполняться с применением методов интервального анализа (см. напр.[4]).

В управленческой деятельности лицо, принимающее решения, часто сталкивается со множеством случаев, когда невозможно избежать проблемы учета неопределенности, обусловленные нечеткостью (fuzzy) цели и (или) ограничений.

Уверенным шагом при формализации и анализе таких задач принятия решений (а также при применении информационной технологии в «нетрадиционных» или «гуманитарных» областях, таких как экономика, медицина, социология), а также для построения математической, эколого-экономической и т.д. моделей конкретных процессов, аппарат теории нечетких множеств считается довольно новое направление в прикладной математике, связанное с именем видного математика современности Л.А.Заде [2].

Как правило, основной целью любого предприятия является получение прибыли. В ситуации с созданием или функционированием любого финансового субъекта возникает проблема его доходности, так как если его доходность ниже средней банковской процентной ставки, то его существование бессмысленно с точки зрения получения прибыли. В финансовых, таких как банки, инвестиционные фонды, страховые компании, брокерские, дилерские фирмы и т.д. основополагающими моментами являются прибыль от размещенных средств и расходы в виде выплат по привлеченным средствам.

Важнейшей задачей коммерческих банков также является получение прибыли. Для этой цели они используют различные возможности, в том числе - расширение кредитных операций, увеличение объема услуг, оказываемых населению. Вместе с тем весьма важно для каждого банка поддержание ликвидности, под которой обычно понимается способность

банка своевременно и полностью погашать свои обязательства перед клиентурой, другими банками и т.д.

Сочетание стремлений- к увеличению прибыли и поддержанию ликвидности - должно служить важным ориентиром в деятельности банков. Однако в действительности не всегда последовательно соблюдается.

Для большей обоснованности принятия управленческих решений по привлечению и размещению денежных средств предлагается рассмотреть общую методику расчета основных показателей деятельности банка и их прогнозирование. Основные показатели вытекают из основного назначения банка - привлечение и размещение денежных средств. Для привлеченных средств - средняя процентная ставка по привлеченным средствам, для размещенных- доходность активных операций (рассчитывается в процентах).

Естественно, что для расчета показателей необходимо наличие информации, накапливаемой за период. В банковском деле сегодня это не представляет труда т.к. все банки имеют автоматизированные системы по обеспечению операционного для банка и накапливают информацию с момента создания банка (системы). Таким образом с наличием данных для обработки затруднений будто бы не существует. Однако, как была отмечено выше эти данные (или часть этих данных) обычно носят нечеткий характер, т.к. они в основном определяются субъективным (экспертным) путем.

В случае применения нечетких методов, например, в финансовом деле в отличие от существующих методов планирования и управления есть возможность активного использования различных мнений лиц, осуществляющих планирование и принимающих решения.

Проблема изучения взаимосвязей экономических показателей является одной из важнейших проблем экономического анализа. Поэтому любая управленческая деятельность заключается в регулировании экономических переменных, и она должна основываться на знании того, как эти переменные влияют на другие переменные, являющиеся ключевыми для принимающего решения политика. Так, в рыночной экономике нельзя непосредственно регулировать темп инфляции, но на него можно воздействовать средствами бюджетно-налоговой и кредитно-денежной политики. Поэтому, в частности, должна быть изучена зависимость между предложением денег и уровнем цен (см. напр.[5]).

Настоящая работа в основном посвящена обсуждению основных принципов моделирования в условиях нечеткой неопределенности. Например, при определении коэффициентов A_i -соответствующей линейной регрессионной модели (X_i - показатели исследуемого объекта)

$$Y=A_1X_1+\dots+A_nX_n.$$

Коэффициенты– параметры (A_1, A_2, \dots, A_n) этой модели естественно отождествляется с нечеткими множествами (в большинстве случаев - нечеткими числами), а моделирование должно выполняться для нечетких

явлений и систем. При этом решения получается в нечетком виде, соответствующем нечеткости заданной информации.

Представленная работа в идейном плане примыкает к работе [3], где дан способ приближенного решения линейных нечетких уравнений и неравенств. Такие нечеткие соотношения представляют также определенный интерес в задачах управления сложными системами, медицинской диагностики и многими другими, в которых определяющие факторы часто носят размытый характер, а иной раз вообще определяются субъективным путем. В большинстве задач такого рода нечеткий гарантированный результат становится лучшим (в смысле оптимизации), чем обычный, ведь обычные множества являются подмножествами соответствующих нечетких множеств.

Отметим, что при вложении инвестиций в реальную экономику банкам и другим инвесторам целесообразно учитывать не только инвестиционную программу, но и финансовую, производственно-хозяйственную и социально-экономическую деятельность предприятий. Поэтому лицо, принимающее решение (ЛПР) заинтересовано в исследовании взаимосвязи инвестиций с другими сферами и, прежде всего, с финансированием и производством.

Способы принятия инвестиционно-финансовых программных решений в условиях определенности ситуаций (т.е. когда будущие доходы и расходы, связанные с реализацией инвестиционного проекта, предлагаются известными) можно объединить в группу моделей, позволяющих определить

- оптимальную инвестиционную программу при заданной для отдельного инвестиционного объекта производственной программе с заданным производственным бюджетом;

- одновременно, как инвестиционную, так и финансовую программы при заданной производственной программе для отдельного инвестиционного объекта;

- одновременно оптимальные инвестиционную и финансовую программы при заданных финансовых средствах и при вовлечении в модель различных альтернатив финансирования. Однако, переход к рыночной системе хозяйственных связей приводит к существенному расширению инвестиционной деятельности благодаря формированию и развитию наряду с рынками товаров и услуг рынка капитала, который представляет собой определенную совокупность различных финансовых рынков. Поэтому для значительной части инвестиционных проектов будущие доходы и расходы, связанные с реализацией инвестиционного проекта, не могут определяться однозначным образом, и инвесторы при обосновании своих решений часто сталкиваются с неопределенностью их оценки. Причины этого обстоятельства обусловлены как самой сутью рыночной экономики (при которой будущие результаты инвестиционной или иной

предпринимательской деятельности существенно зависят от рыночной конъюнктуры, испытывающей влияние множества факторов, не зависящих от усилий инвесторов), так и тем, что экономические явления и процессы как правило, подвержены воздействию достаточного числа неэкономических факторов (климатические и природные условия, политические, социальные и др.), которые не всегда поддаются точной оценке и прогнозированию.

Оптимизационная модель эколого-экономического характера с нечеткими параметрами

Как было отмечено выше, теория нечетких множеств, как довольно новое направление прикладной математики, связанное с именем видного математика современности Л.А.Заде, является одной из бурно развивающихся теорий в современной науке. Это обусловлено удачным применением этой теории в современных направлениях науки и техники, таких, как проблемы искусственного интеллекта, принятие решений и управления, распознавания и диагностики. С другой стороны, многие задачи эколого-экономического характера, такие, как проблемы охраны окружающей среды, сохранения ресурсов и другие, сводятся к моделированию (в настоящее время трудно найти область человеческой деятельности, в которой не использовались бы методы моделирования) соответствующих оптимизационных процессов, в которых тесно переплетены разнородные неопределенные переменные.

Теория нечетких множеств к настоящему времени приобрела широкую популярность и получила практическое применение во многих отраслях знаний. В сфере принятия решений на базе этой теории разработан и еще нужно разработать широкий спектр разнообразных методов. В частности, для прогнозирования и других проблем планирования в бизнесе на базе данных, полученных от специалистов, нужно построить нечеткие нелинейные регрессионные модели. В этом случае в качестве неопределенных коэффициентов модели целесообразно использовать нечеткие множества.

Среди областей широкого применения теории нечетких множеств особое место также занимают задачи математического программирования с нечеткими значениями параметров и (или) ограничений.

В заключении рассмотрим оптимизационно-управленческую модель производственной программы объединения с конечным числом производственных структур с учетом экологического фактора (т.е. часть выпуска продукции затрачивается на природоохранную деятельность) :

$$\begin{aligned}(C, Y) &\rightarrow \max, \\ (Q, Y) &\leq R, \\ Y &\geq 0.\end{aligned}$$

В этой модели

У-вектор вариантов экологической программы; С-вектор эффективности вариантов; Q-матрица удельных затрат вариантов программы; R-вектор лимита на природоохранные затраты.

При перспективном планировании возможно, что компоненты векторов С, Q, и R назначаются координирующим центром и допускаются некоторые отклонения от «директивного» значения. В итоге значения компонентов этих векторов параметрически зависят от степеней допустимости.

Очевидно, что при такой трактовке компоненты вышеуказанных векторов будут представлять собой нечеткие множества допустимых значений каждого варианта эффективности, удельных затрат и лимита на природоохранные затраты. Полученную задачу нечеткого линейного программирования можно решать средствами теории нечетких множеств.

В большинство задач такого рода нечеткий гарантированный результат становится лучшим в смысле оптимизации чем обычный (ведь обычные множества являются подмножествами соответствующих нечетких множеств).

На наш взгляд, нелегкой проблемой сегодняшнего дня является выбор подходящего метода или программного обеспечения для поддержки различных процессов принятия решений. Поэтому особую актуальность приобретает проведение сравнительного анализа (при условии, когда имеет место неопределенность различного рода) специфических методов и разработка рекомендаций по их применению.

Заключение

Принятие решений является одним из направлений прикладной математики. Рассмотрение процессов и проблем принятия решений в различных научных дисциплинах вполне оправдано. Центральным для этих проблем является сам акт выбора человеком одного из вариантов решений. В отличие от других научных дисциплин в науке о принятии решений основным предметом является исследование процесса выбора. Эта наука изучает, как человек принимает решения и как следует ему в этом помогать, создавая специальные методы и компьютерные системы. Появление консультативной деятельности является закономерным результатом развития экономики. Объективная необходимость использования консультантов, аналитиков в административном аппарате непрерывно возрастает. Наряду с прочими факторами эта необходимость связана с быстрыми изменениями в окружающем нас мире (например, отсутствие рациональной целенаправленной политики к экономическим потерям, приводят к снижению темпов научно-технического прогресса).

Существуют две причины, препятствующие использованию более совершенных методов и процедур принятия решений. Первая из них связана с традиционными предрассудками сотрудников административного аппарата,

привязанностью к привычным формам подготовки решений. Вторая – с несовершенством стиля и методов работы консультантов, с недостаточным учетом ими человеческих и ряд других неопределенных факторов.

Любое сотрудничество руководителей и консультантов – двусторонний процесс. Не стоит думать, что пропагандистская компания, либо просто указания вышестоящих руководителей могут стимулировать «внедрение» новых методов принятия решений. Дело гораздо сложнее: необходима совместная и кропотливая работа сотрудников аппарата и консультантов. Эта работа редко приводит к ошеломляющим эффектам. Чудес не бывает, нельзя сделать хорошего выбора при только плохих альтернативах. Но структуризация процесса принятия решений и разумное использование экспертов могут привести к возрастанию способностей руководителя уверенно решать все более сложные проблемы.

В настоящее время перед специалистами по методам принятия решений, перед консультантами – аналитиками стоят сложные проблемы. Многие реальные процессы, протекающие в административном аппарате, гораздо сложнее тех, для которых уже разработаны аналитические подходы. Есть, например, случаи, когда интересы различных частей организации или разных организаций не совпадают. Это далеко не всегда плохо – именно в конфликте вырабатывается компромиссное решение, учитывающее многие реальные ограничения. Часто решения принимаются коллективом руководителей. При этом возникают проблемы координации политики влиятельных членов этого коллектива, согласования противоречивых интересов.

Перечисленные проблемы исключительно сложны с методологической точки зрения. На наш взгляд, в настоящее время нет практических конструктивных методов принятия групповых решений в условиях противодействия при многих активных участниках. Далеки от своего удовлетворительного решения многие относительно более простые проблемы принятия индивидуальных решений.

Сам путь к тем или иным формальным постановкам долог и тернист. Он пролегает через многие преграды и препятствия, неизбежные в реальных ситуациях. Жизнь требует от консультанта по проблемам принятия решений сочетания многих качеств: искусства анализа ситуаций, учет неопределенностей и риска, глубоких профессиональных знаний, приемов и методов принятия решений, умения представления рекомендаций, профессиональных навыков в работе с людьми.

Для многих консультантов–специалистов по методам принятия решений эта область работы привлекательна именно новым сочетанием психологических, социологических, математических, экономических проблем. В предстоящие десятилетия многие так называемые поведенческие науки, безусловно, сделают шаг вперед. Тогда появится возможность строить намного более эффективные методы принятия решений. Но

уже сейчас необходимо рассматривать процесс принятия решений как процедуру, главными участниками которой являются руководитель эксперты. Именно человеческие, а не математические или машинные аспекты являются основными критериями проверки практической ценности методов принятия решений (см. напр. [6]).

И, наконец, безусловно, приятной наградой является возможность реально улучшить процессы принятия решения, наблюдать положительные изменения в сложных административных механизмах, вызванные его работой.

Итак, принятие решений – это прикладная научная дисциплина. Основную роль в ее развитии должны играть практики, помогающие людям в сложных задачах выбора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О. Н. Анализ синтез и планирование решений в экономике. М.: Финансы и статистика, 2000.
2. Zadeh L.A. Fuzzy Sets.-Inform. And Contr.,1965, №8, p. 338-353
3. R.M.Khuliyev, F.A.Mirzayev. Application of interval method in the analysis of economic-ecologically oriented Fuzzy models. Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika –Riyaziyyat elmləri seriyası, 2018, N2 , s. 17-25
4. Zadeh L.A. Fuzzy Sets.-Inform. And Contr.,1965.№8. P. 338-353
5. Moore R.E. Interval analisis. Prentice - Hall, New-Jersey, 1966.
6. Качала В.В. Основы теории систем и системного анализа. Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия-телеком, 2015, 210с.
7. Мендель А. В. Модели принятия решений / А.В.Мендель. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015, 463 с.

SİTUASİYALARIN QEYRİ-MÜƏYYƏNLİYİ ŞƏRAİTLƏRİNDƏ QƏRAR QƏBUL ETMƏYƏ SİSTEMLİ YANAŞMA HAQQINDA

R.M.QULİYEV, F.Ə.MİRZƏYEV

XÜLASƏ

Məqalə situasiyaların qeyri-müəyyənliyi şəraitlərində idarəetmə fəaliyyətinin model-ləşdirilməsinin əsas prinsiplərinin təhlilinə həsr olunmuşdur.

Açar sözlər: qeyri-müəyyənlik, qərar qəbul etmə, qeyri-səlis çoxluqlar nəzəriyyəsi, investisiya layihəsi, sistemli elmi yanaşma, ekoloji amil.

ON A SYSTEM APPROACHES TO DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTY OF SITUATIONS

R.M.KHULIYEV, F.A.MIRZAYEV

SUMMARY

This work is devoted to a discussion of the basic principles of modeling management activities in conditions of uncertainty.

Keywords: uncertainty, decision-making, Fuzzu set theory, investment project, systematic scientific approach , environmental factor.

УДК 517.9

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА СОДЕРЖАЩАЯ ВТОРЫЕ
ПРОИЗВОДНЫЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ, IМ.А.САДЫГОВ, А.М.САДЫГОВ
Бакинский Государственный Университет
misreddin08@rambler.ru

В работе изучены свойства субдифференциала интегрального и терминального функционала в пространстве типа абсолютно непрерывных функций.

Ключевые слова: интегральный функционал, выпуклая функция, субдифференциал.

В работе изучаются субдифференциал интегрального и терминального функционала в пространстве $W_{p,2}^n[t_0, T]$ (см.[1]). Такая задача в $W_{p,1}^n[t_0, T]$ изучены в [2] и [3].

Интегральный выпуклый функционал в пространстве L_p ($1 \leq p \leq \infty$) и S исследованы в статье Р.Т.Рокафеллара [4] и в статье А.Д.Иоффе и В.Л.Левина [5], а также в книгах А.Д.Иоффе и В.М.Тихомирова [6], И.Экланда и Р.Темам [7].

Известно, что пространства Соболева представляют более теоретический интерес. В работе изучены двойственности и субдифференцируемости выпуклых функционалов в пространстве $W_{p,2}^n[t_0, T]$.

1. О субдифференцируемости интегрального функционала

Всякая функция (со значениями из $[-\infty, +\infty]$), определенная на $S \times R^n$, где S произвольное пространство с конечной положительной мерой, называется интегрантом. Интегрант $f(s, x)$ определенный на $S \times R^n$ называется (см.[6, с.344]) измеримым (соответственно нормальным, выпуклым и т.д.), если многозначное отображение $s \rightarrow \text{epf}_s = \{(x, \alpha) \in R^n \times R : \alpha \geq f(s, x)\}$ измеримо ($s \rightarrow \text{epf}_s$ измеримо и epf_s замкнутое множество, epf_s выпукло и т.д.). Если f нормальный интегрант на $S \times R^n$, то для всякого измеримого отображения $x(s)$ из S в R^n функция $f(s, x(s))$ измерима (см.[6], предложение 8.1.8). Если f измеримый интегрант на $S \times R^n$ и почти при каждом s функция f_s^* собственная, то из теоремы 8.1.4 [6, с.348] следует, что f^*

нормальный выпуклый интеграл на $S \times \mathbb{R}^n$.

Обозначим $R_\infty = R \cup \{+\infty\}$.

Символом $W_{p,2}^n[t_0, T]$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных вместе со своими производными первого порядка функций из $[t_0, T]$ в \mathbb{R}^n вторая производная, которых принадлежит $L_p^n[t_0, T]$, где $1 \leq p < \infty$. Норма в $W_{p,2}^n[t_0, T]$ может быть задана разными эквивалентными способами. Например

$$\|x(\cdot)\|_{W_{p,2}^n} = |x(t_0)| + |\dot{x}(t_0)| + \left(\int_{t_0}^T |\ddot{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{или} \quad \|x(\cdot)\|_2 = \max_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)| + \max_{t_0 \leq t \leq T} |\dot{x}(t)| + \left(\int_{t_0}^T |\ddot{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Всякий линейный непрерывный функционал z^* на пространстве $W_{p,2}^n[t_0, T]$, $1 \leq p < \infty$, можно единственным образом представить в виде

$$z^*(x) = (x(t_0))|_{a_0} + (\dot{x}(t_0))|_{a_1} + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t))|_{\nu(t)} dt,$$

где $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^n$, $\nu(\cdot) \in L_{p'}^n[t_0, T]$, $pp' = p + p'$. Функционал $z^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$ в дальнейшем обозначается символом $(a_0, a_1, \nu(\cdot))$ (см. [6, с.32]).

Пусть g - нормальный выпуклый интеграл на $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^T g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad x \in W_{p,2}^n[t_0, T].$$

Субградиентами $J(x)$ в точке $\bar{x} \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ являются по определению элементы $z^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$ для которых $J(x) - J(\bar{x}) \geq z^*(x - \bar{x})$ при всех $x \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ или, что равносильно, $J^*(z^*) + J(\bar{x}) = z^*(\bar{x})$, где $J^*(z^*) = \sup \{z^*(x) - J(x) : x \in W_{p,2}^n[t_0, T]\}$.

Множество всех таких субградиентов обозначается через $\partial J(\bar{x})$ и называется субдифференциалом функционала $J(x)$ в точке \bar{x} .

В этом пункте устанавливается связь между $\partial J(\bar{x})$ и $\partial g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$.

Лемма 1.1. Пусть $g: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow R_\infty$ нормальный выпуклый интеграл, существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируема в $[t_0, T]$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|(x, y)| \leq \varepsilon$. Тогда функционал $J(x)$ непрерывен в точке $x_0(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ относительно нормированной топологии пространства $W_{p,2}^n[t_0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $C^n[t_0, T] \times C^n[t_0, T]$

$$I(x, y) = \int_{t_0}^T g(t, x(t), y(t)) dt$$
 функционал $I(x, y)$ непрерывен в пространстве $C^n[t_0, T] \times C^n[t_0, T]$ в точке $(x_0(\cdot), \dot{x}_0(\cdot))$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|I(x, y) - I(x_0, \dot{x}_0)| \leq \varepsilon$$
 при $(x, y) \in C^n[t_0, T] \times C^n[t_0, T]$,

$$\|(x, y) - (x_0, \dot{x}_0)\|_C = \|x - x_0\|_C + \|y - \dot{x}_0\|_C \leq \delta,$$
 где $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [t_0, T]\}$. Обозначим $\bar{T} = \max\{1, \sqrt{T - t_0}\}$. Так как

$$\begin{aligned}
 \|x - x_0\|_C + \|\dot{x} - \dot{x}_0\|_C &\leq |x(t_0) - x_0(t_0)| + \int_{t_0}^T |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)| dt + \\
 &+ |\dot{x}(t_0) - \dot{x}_0(t_0)| + \int_{t_0}^T |\ddot{x}(t) - \ddot{x}_0(t)| dt \leq |x(t_0) - x_0(t_0)| + (T - t_0) \|\dot{x} - \dot{x}_0\|_C + \\
 &+ |\dot{x}(t_0) - \dot{x}_0(t_0)| + \int_{t_0}^T |\ddot{x}(t) - \ddot{x}_0(t)| dt \leq |x(t_0) - x_0(t_0)| + (1 + T - t_0) (|\dot{x}(t_0) - \dot{x}_0(t_0)| + \\
 &+ \sqrt{T - t_0} (\int_{t_0}^T |\ddot{x}(t) - \ddot{x}_0(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}) \leq (1 + T - t_0) \bar{T} \|x - x_0\|_{W_{p,2}^n},
 \end{aligned}$$

то $|J(x) - J(x_0)| \leq \varepsilon$ при $\|x - x_0\|_{W_{p,2}^n} \leq \frac{\delta}{\bar{T}(1 + T - t_0)}$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. Пусть $g : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_-$ нормальный выпуклый интегрант, выпуклый функционал $J(x)$ конечен в точке $x_0(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) функционал $J(x)$ непрерывен в точке $x_0(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ относительно нормированной топологии пространства $W_{p,2}^n[t_0, T]$.
- б) существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируема в $[t_0, T]$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|(x, y)| \leq \varepsilon$.

Доказательство. По лемме 1.1 имеем, что из б) следует а).

Обратно если выполнено а), то положив $x(t) = x_0(t) + x$ и $\dot{x}(t) = x_0(t) + x + ty$ получим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t))$ и $g(t, x_0(t) + x + ty, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируемы в $[t_0, T]$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|(x, y)| \leq \varepsilon$. Из суммируемости функции $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t))$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \leq \varepsilon$ следует,

что функционал $x(\cdot) \rightarrow \int_{t_0}^T g(t, x(t), \dot{x}_0(t)) dt$ непрерывен в пространстве $W_{p,2}^n[t_0, T]$ в точке $x_0(\cdot)$. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x - ty, \dot{x}_0(t))$ суммируема в $[t_0, T]$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|(x, y)| \leq \delta$.

Положив $v = \min\{\varepsilon, \delta\}$ получим, что

$$g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + 0,5y) \leq 0,5g(t, x_0(t) + x + ty, \dot{x}_0(t) + y) + 0,5g(t, x_0(t) + x - ty, \dot{x}_0(t))$$

при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|(x, y)| \leq v$. Поэтому функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируема в $[t_0, T]$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|(x, y)| \leq 0,5v$. Отсюда следует б). Лемма доказана.

Рассмотрим в пространстве $L_\infty^n[t_0, T] \times L_\infty^n[t_0, T]$ функционал

$$\bar{J}(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_{t_0}^T g(t, x(t), y(t)) dt.$$

Лемма 1.3. Если $(x, y) \rightarrow g(t, x, y)$ положительно однородная выпуклая функция и для всякого $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функция $g(t, x, y)$ суммируема, то

$$J^*(z^*) = \begin{cases} 0: a_0 = \int_{t_0}^T x^*(s) ds, a_1 = -\int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T y^*(s) ds, v(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \\ - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^t y^*(s) ds + \int_{t_0}^T y^*(s) ds; (x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0, 0); \\ +\infty: \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

где $z^* = (a_0, a_1, v(\cdot))$.

Доказательство. Ясно, что $\bar{J}(x(\cdot), y(\cdot))$ выпуклый положительно однородный и по следствию 2A[4] непрерывный функционал на $L_\infty^n[t_0, T] \times L_\infty^n[t_0, T]$. Поэтому по предложению 4.2.3 ([6], с. 210) и по теореме 8.3.3 ([6], с. 362) $\partial \bar{J}(0)$ непусто, слабо* компактно и $\partial \bar{J}(0) \subset L_1^n[t_0, T] \times L_1^n[t_0, T]$. Из предложения 4.1.1 [6, с.203] следует, что

$$\bar{J}(x(\cdot), y(\cdot)) = \max_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0, 0)} \int_{t_0}^T ((x^*(t)|x(t)) + (y^*(t)|y(t))) dt.$$

Поэтому, используя теорему о минимаксе (см. например, [8, с.288]) имеем

$$\begin{aligned} J^*(z^*) &= \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ \langle z^*, x \rangle - J(x) \} = \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0)|a_0) + (\dot{x}(t_0)|a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t)|v(t)) dt - \\ &- \max_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0, 0)} \int_{t_0}^T ((x^*(t)|x(t)) + (y^*(t)|\dot{x}(t))) dt \} = \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \min_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0, 0)} \{ (x(t_0)|a_0) + (\dot{x}(t_0)|a_1) + \\ &+ \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t)|v(t)) dt - \int_{t_0}^T ((x^*(t)|x(t)) + (y^*(t)|\dot{x}(t))) dt \} = \min_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0, 0)} \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0)|a_0) + \\ &+ (\dot{x}(t_0)|a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t)|v(t)) dt - \int_{t_0}^T ((x^*(t)|x(t)) + (y^*(t)|\dot{x}(t))) dt \}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^T (\dot{x}^*(t) | x(t)) dt = \int_{t_0}^T (x(t) \left| d \left(\int_{t_0}^t x^*(s) ds - \int_{t_0}^T x^*(s) ds \right) \right) = (x(t_0) \left| \int_{t_0}^T x^*(s) ds - \right. \\
& - \int_{t_0}^T (\dot{x}(t) \left| \left(\int_{t_0}^t x^*(s) ds - \int_{t_0}^T x^*(s) ds \right) \right) dt = (x(t_0) \left| \int_{t_0}^T x^*(s) ds - \int_{t_0}^T (\dot{x}(t) \left| \left(d \int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \right. \right. \\
& - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv = (x(t_0) \left| \int_{t_0}^T x^*(s) ds + \right. \\
& + (\dot{x}(t_0) \left| \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) \left| \left(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \right. \right. \\
& - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv) dt.
\end{aligned}$$

Также имеем, что

$$\int_{t_0}^T (\dot{y}^*(t) | \dot{x}(t)) dt = \int_{t_0}^T (\dot{x}(t) \left| d \left(\int_{t_0}^t \dot{y}^*(s) ds - \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds \right) \right) = (\dot{x}(t_0) \left| \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds - \int_{t_0}^T (\dot{x}(t) \left| \int_{t_0}^t \dot{y}^*(s) ds - \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds \right) dt.$$

Поэтому получим, что

$$\begin{aligned}
J^*(z^*) &= \min_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0,0)} \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | v(t)) dt - (x(t_0) \left| \int_{t_0}^T x^*(s) ds - \right. \\
& - (\dot{x}(t_0) \left| \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) \left| \left(\int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \right. \right. \\
& + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv) dt - (\dot{x}(t_0) \left| \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) \left| \left(\int_{t_0}^t \dot{y}^*(s) ds - \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds \right) dt) \} = \\
& = \min_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0,0)} \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0 - \int_{t_0}^T x^*(s) ds) + (\dot{x}(t_0) | a_1 - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds) + \\
& + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | v(t) - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds - \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds) dt = \\
& = \begin{cases} 0 : a_0 = \int_{t_0}^T x^*(s) ds, a_1 = - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds, v(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \\ - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds + \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds; (x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0,0); \\ + \infty : \text{в противном случае.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначив $\psi_0(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv$,

$\psi_1(t) = - \int_{t_0}^t \dot{y}^*(s) ds + \int_{t_0}^T \dot{y}^*(s) ds$ получим, что $v(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t)$, $\dot{\psi}_0(t) = x^*(t)$,

$\dot{\psi}_1(t) = -\dot{y}^*(t)$, $a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0)$, $a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0)$, $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0$, $\psi_1(T) = 0$.

Известно, что (см. [4]) если выполняются условия леммы 1.3, то $(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0,0)$ тогда и только тогда когда $(x^*(t), y^*(t)) \in \partial g(t, 0, 0)$. Поэтому $(\dot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial g(t, 0, 0)$.

Следствие 1.1. Если выполняются условия леммы 1.3, то

$$J^*(z^*) = \begin{cases} 0 : \text{если } a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0), a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0), v(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \psi_1(T) = 0, \\ \quad \dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, (\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial g(t, 0, 0); \\ +\infty : \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следствие 1.2. Если $(x, y) \rightarrow g(t, x, y)$ положительно однородная выпуклая функция и для всякого $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функция $g(t, x, y)$ суммируема, то $z^* = (a_0, a_1, v(\cdot)) \in \partial J(0)$ в том и только в том случае, когда существуют функции $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ и $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$ такие, что

$$a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0), a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0), v(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \psi_1(T) = 0, \dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, (\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial g(t, 0, 0).$$

Теорема 1.1. Пусть $g : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ нормальный выпуклый интегрант и существует $\delta > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируема при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |(x, y)| < \delta$. Тогда $z^* = (a_0, a_1, v(\cdot)) \in \partial J(\bar{x})$ в том и только в том случае, когда существуют функции $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ и $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$ такие, что $a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0), a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0), v(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \psi_1(T) = 0, \dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0$ и $(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$.

Доказательство. Непустота $\partial J(\bar{x})$ вытекает из леммы 1.1 и предложения 4.2.3 ([6], с.210). Докажем второе утверждение теоремы. Так как (см. [9, с.63])

$$g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - g(t, \bar{x}(t) - y(t), \dot{\bar{x}}(t) - \dot{y}(t)) \leq \frac{g(t, \bar{x}(t) + \lambda y(t), \dot{\bar{x}}(t) + \lambda \dot{y}(t)) - g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))}{\lambda} \leq$$

$$\leq g(t, \bar{x}(t) + y(t), \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y}(t)) - g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$$

при $0 < \lambda \leq 1$, то используя лемму 1.1 и теорему Лебега (см. [10]) получим, что

$$\begin{aligned} J'(\bar{x}; y) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{J(\bar{x} + \lambda y) - J(\bar{x})}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{t_0}^T \frac{g(t, \bar{x}(t) + \lambda y(t), \dot{\bar{x}}(t) + \lambda \dot{y}(t)) - g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))}{\lambda} dt = \\ &= \int_{t_0}^T \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{g(t, \bar{x}(t) + \lambda y(t), \dot{\bar{x}}(t) + \lambda \dot{y}(t)) - g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))}{\lambda} dt = \int_{t_0}^T g'(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t); y(t), \dot{y}(t)) dt. \end{aligned}$$

Из предложения 4.1.4 ([6], с. 206) вытекает, что $y \rightarrow J'(\bar{x}; y)$ конечен и непрерывен на $W_{p,2}^n[t_0, T]$. Поэтому $g'(t, \bar{x}(t); x, y)$ суммируема при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Если учесть, что $\partial J(\bar{x}) = \partial J'(\bar{x}, 0)$,

$\partial g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) = \partial \bar{g}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t); 0, 0)$, то утверждение теоремы вытекает из следствия 1.2. Теорема доказана.

2. О двойственности терминального функционала

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$. Рассмотрим в пространстве $W_{p,2}^n[t_0, T]$ функционал вида $I(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))$ и определим условия при которых $I^*(x^*)$ конечен.

Лемма 2.1. Если $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $q(\cdot) \in L_p[t_0, T]$ и

$$\sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,2}^1[t_0, T] \\ x(t_0)=a_1, x(T)=a_2, \\ \dot{x}(t_0)=b_1, \dot{x}(T)=b_2}} \int_{t_0}^T q(t) \ddot{x}(t) dt < +\infty, \quad \text{то } q(t) = \alpha_1 t + \alpha_2$$

в $[t_0, T]$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $z(t)$ произвольный многочлен, такой что $z(t_0) = b_1, z(T) = b_2$. Положим

$$\bar{z}(t) = a_1 + \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau + \left(3\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^2 - 2\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^3\right)(a_2 - a_1 - \int_{t_0}^T z(\tau) d\tau)$$

Ясно, что $\bar{z}(t_0) = a_1, \bar{z}(T) = a_2, \dot{\bar{z}}(t_0) = b_1, \dot{\bar{z}}(T) = b_2$. Тогда получим, что

$$\sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,2}^1[t_0, T] \\ x(t_0)=a_1, x(T)=a_2, \\ \dot{x}(t_0)=b_1, \dot{x}(T)=b_2}} \int_{t_0}^T q(t) \ddot{x}(t) dt = \sup_{\substack{z(\cdot) \in W_{p,2}^1[t_0, T] \\ z(t_0)=0, z(T)=0, \\ \dot{z}(t_0)=0, \dot{z}(T)=0}} \int_{t_0}^T q(t) \ddot{z}(t) dt + \int_{t_0}^T q(t) \ddot{\bar{z}}(t) dt < +\infty.$$

Отсюда следует, что $\sup_{\substack{z(\cdot) \in W_{p,2}^1[t_0, T] \\ z(t_0)=0, z(T)=0, \\ \dot{z}(t_0)=0, \dot{z}(T)=0}} \int_{t_0}^T q(t) \ddot{z}(t) dt < +\infty$. Поэтому $\int_{t_0}^T q(t) \ddot{z}(t) dt = 0$ при

$z(\cdot) \in \dot{W}_{p,2}^1[t_0, T] = \{W_{p,2}^1[t_0, T], x(t_0) = 0, x(T) = 0, \dot{x}(t_0) = 0, \dot{x}(T) = 0\}$. Так как

$C_0^\infty(t_0, T) \subset \dot{W}_{p,2}^1[t_0, T]$, то получим, что $\int_{t_0}^T q(t) \ddot{x}(t) dt = 0$ при $x(\cdot) \in C_0^\infty(t_0, T)$. Ясно,

что $\int_{t_0}^T q(t) \ddot{x}(t) dt = \int_{t_0}^T \ddot{q}(t) x(t) dt = 0$ при $x(\cdot) \in C_0^\infty(t_0, T)$. Поэтому $\ddot{q}(t) = 0$. Отсюда

следует, что $q(t) = \alpha_1 t + \alpha_2$ (см. [10, с.244]). Лемма доказана.

Лемма 2.2. Если $I(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))$ и в точке $x^* = (a_0, a_1, \nu(\cdot)) \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$ функционал $I^*(x^*)$ конечен, то $\nu(t) = c_1 t + c_2$ при $t \in [t_0, T]$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть точка $\bar{x}(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$, такая, что $J(\bar{x})$ конечен, т.е.

$(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) \in \mathbb{R}^{4n}$ такая, что $\varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) < +\infty$. По определению

$$\begin{aligned} I^*(x^*) &= \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ \langle x^*, x \rangle - I(x) \} = \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | \nu(t)) dt - \\ &- \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ x(t_0) = \bar{x}(t_0), x(T) = \bar{x}(T), \\ \dot{x}(t_0) = \dot{\bar{x}}(t_0), \dot{x}(T) = \dot{\bar{x}}(T)}} (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | \nu(t)) dt - \\ &- \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)). \end{aligned}$$

Так как $I^*(x^*)$ конечен, то отсюда вытекает, что

$\sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ x(t_0) = \bar{x}(t_0), x(T) = \bar{x}(T), \\ \dot{x}(t_0) = \bar{\dot{x}}(t_0), \dot{x}(T) = \bar{\dot{x}}(T)}} \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | \nu(t)) dt < +\infty$. Тогда из леммы 2.1 получим, что

$\nu(t) = c_1 t + c_2 = (c_1^1, \dots, c_1^n) t + (c_2^1, \dots, c_2^n)$ постоянная вектор-функция. Лемма доказана.

Теорема 2.1. Если $\varphi: R^n \rightarrow R_\infty$ собственная выпуклая функция и $x^* = (a_0, a_1, \nu(\cdot)) \in \partial I(\bar{x})$, где $x^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$, то существуют векторы $c_1, c_2 \in R^n$ такие, что $\nu(t) = c_1 t + c_2$ и

$$(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \bar{\dot{x}}(t_0), \bar{x}(T), \bar{\dot{x}}(T)).$$

Доказательство. По определению субдифференциала $x^* \in \partial J(\bar{x})$ в том и только в том случае, когда $I^*(x^*) + I(\bar{x}) = x^*(\bar{x})$. Так как $I^*(x^*)$ конечен, где $x^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$, $x^* = (a_0, a_1, \nu(\cdot))$, то $\nu(t) = c_1 t + c_2$, где $c_1, c_2 \in R^n$. Поэтому

$$\begin{aligned} I^*(x^*) &= \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ \langle x^*, x \rangle - I(x) \} = \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | c_1 t + c_2) dt - \\ &- \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} = \sup_{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + (\dot{x}(t) | c_1 t + c_2) \Big|_{t_0}^T - \\ &- \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | c_1) dt - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} = \sup_{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \\ &+ (\dot{x}(T) | c_1 T + c_2) - (\dot{x}(t_0) | c_1 t_0 + c_2) - (x(T) | c_1) + (x(t_0) | c_1) - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} = \\ &= \sup_{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0 + c_1) + (\dot{x}(t_0) | a_1 - c_1 t_0 - c_2) - (x(T) | c_1) + (\dot{x}(T) | c_1 T + c_2) - \\ &- \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} = \varphi^*(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2). \end{aligned}$$

Тогда получим, что

$$\begin{aligned} &\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{\dot{x}}(t_0), \bar{x}(T), \bar{\dot{x}}(T)) + \varphi^*(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) = \\ &= (\bar{x}(t_0) | a_0 + c_1) + (\bar{\dot{x}}(t_0) | a_1 - c_1 t_0 - c_2) + (\bar{x}(T) | -c_1) + (\bar{\dot{x}}(T) | c_1 T + c_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \bar{\dot{x}}(t_0), \bar{x}(T), \bar{\dot{x}}(T))$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садыгов М.А. Об одной экстремальной задаче, заданной на пространстве Соболева. Известия АН Азербайджанский ССР, 1985, №5, с.25-33.
2. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002, 125 с.
3. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014, 359 p.
4. Рокафеллар Р. Интегралы, являющиеся выпуклыми функционалами, II. В кн. Математическая экономика. М.: Мир, 1974, с. 170-204.
5. Иоффе А.Д., Левин В.Л. Субдифференциалы выпуклых функции. Труды Московского Математического общества, 1972, т.26, с.3-73.
6. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479с.
7. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979, 400 с.

8. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988, 510 с.
9. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988, 264 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.

AXTARILAN FUNKSIYANIN İKİNCİ TƏRTİB TÖRƏMƏSİ DAXİL OLAN VARIASIYA MƏSƏLƏSİ, I

M.A.SADIQOV, A.M.SADIQOV

XÜLASƏ

İşdə mütləq kəsiməz funksiyalar fəzası tipli fəzada integral və terminal funksionalların subdiferensialının xassəsi öyrənilmişdir.

Açar sözlər: integral funksional, qabarıq funksiya, subdiferensial.

VARIATION PROBLEM CONTAINING SECOND DERIVATIVES OF UNKNOWN FUNCTIONS, I

M.A.SADYGOV, A.M.SADYGOV

SUMMARY

The property subdifferential of an integral and terminal functional in a space of the type of absolutely continuous functions is studied.

Keywords: integral functional, convex function, subdifferential.

УДК 517.642

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА С ПОЛУРАСПАДАЮЩИМИСЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.М.ГАСАНЛИ*, Л.И.МАММАДОВА**, И.М.НАБИЕВ*****

Бакинский Государственный Университет** Азербайджанский Государственный Университет
Нефти и Промышленности***** Институт Математики и Механики НАН Азербайджана**aytachasanli9900@gmail.com**leylaimae@yahoo.com**nabievim@yahoo.com*

В статье рассматривается система Дирака при некоторых граничных условиях, одно из которых содержит спектральный параметр. Доказана теорема единственности и построен алгоритм решения обратной задачи восстановления краевых задач по спектральным данным.

Ключевые слова: система Дирака, собственные значения, обратная задача, теорема единственности, алгоритм решения.

Рассматривается краевая задача, порожденная одномерной стационарной системой Дирака (связанной с поведением релятивистского электрона в электростатическом поле)

$$BY'(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \quad x \in [0, \pi] \quad (1)$$

и полуспадающими граничными условиями вида

$$y_2(0) + \alpha y_1(0) = 0, \quad (2)$$

$$y_1(0) + \lambda[\beta y_1(\pi) + \gamma y_2(\pi)] = 0,$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$

λ – спектральный параметр, α , β и γ – положительные числа. Эту задачу будем обозначать через $D(\alpha, \beta, \gamma)$. Предполагается, что элементы $p(x)$ и $q(x)$ матрицы $Q(x)$ в (1) являются вещественными функциями, принадлежащими пространству $W_2^1[0, \pi]$. Через $W_2^1[0, \pi]$ мы обозначаем

пространство, состоящее из заданных на отрезке $[0, \pi]$ абсолютно непрерывных функций, которые имеют производную, суммируемую с квадратом на $[0, \pi]$.

Многие вопросы прямых и обратных спектральных задач для системы Дирака в случае разделенных и неразделенных граничных условий хорошо изучены (см. [1-13] и литературу в них). В настоящей работе доказана теорема единственности и составлен алгоритм восстановления системы Дирака по спектральным данным, которыми являются спектры двух краевых задач и некоторое число.

Краевая задача $D(\alpha, \beta, \gamma)$ всегда имеет тривиальное решение $Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Значения параметра λ , при которых задача $D(\alpha, \beta, \gamma)$ имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями этой задачи. Множество собственных значений называется спектром $D(\alpha, \beta, \gamma)$. Характеристическая функция, нули которой являются собственными значениями краевой задачи $D(\alpha, \beta, \gamma)$, имеет вид

$$\Delta(\lambda) = 1 + \lambda[\beta(c_1(\pi, \lambda) - \alpha s_1(\pi, \lambda)) + \gamma(c_2(\pi, \lambda) - \alpha s_2(\pi, \lambda))], \quad (3)$$

где $S(x, \lambda) = \begin{pmatrix} s_1(x, \lambda) \\ s_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ и $C(x, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x, \lambda) \\ c_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ – решения уравнения (1),

удовлетворяющие начальным условиям $S(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Лемма [11]. Для функций $s_1(\pi, \lambda)$, $s_2(\pi, \lambda)$, $c_1(\pi, \lambda)$ и $c_2(\pi, \lambda)$ имеют место следующие представления:

$$s_1(\pi, \lambda) = -\sin \lambda\pi + A_1 \frac{\cos \lambda\pi}{\lambda} + B_1 \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} + \frac{\psi_1(\lambda)}{\lambda},$$

$$s_2(\pi, \lambda) = \cos \lambda\pi + A_2 \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} + B_2 \frac{\cos \lambda\pi}{\lambda} + \frac{\psi_2(\lambda)}{\lambda},$$

$$c_1(\pi, \lambda) = \cos \lambda\pi + A_3 \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} - B_2 \frac{\cos \lambda\pi}{\lambda} + \frac{\psi_3(\lambda)}{\lambda},$$

$$c_2(\pi, \lambda) = \sin \lambda\pi + A_4 \frac{\cos \lambda\pi}{\lambda} + B_1 \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} + \frac{\psi_4(\lambda)}{\lambda},$$

где $A_1 = A + Q_1$, $A_2 = A + Q_2$, $A_3 = A - Q_2$, $A_4 = -A + Q_1$,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\pi [p^2(x) + q^2(x)] dx, \quad Q_1 = \frac{q(\pi) - q(0)}{2}, \quad Q_2 = -\frac{q(\pi) + q(0)}{2},$$

$$B_1 = -\frac{p(0) + p(\pi)}{2}, \quad B_2 = \frac{p(0) - p(\pi)}{2},$$

$$\psi_p(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\psi}_p(t) e^{i\lambda t} dt, \quad \tilde{\psi}_p(t) \in L_2[-\pi, \pi], \quad p = 1, 2, 3, 4.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $p(0) = p(\pi) = q(0) = q(\pi) = 0$. Используя лемму, характеристическую функцию (3) можно преобразовать к виду

$$\Delta(\lambda) = 1 + \lambda(d_2 \sin \lambda\pi - d_1 \cos \lambda\pi) - A(d_2 \cos \lambda\pi + d_1 \sin \lambda\pi) + \psi_5(\lambda), \quad (4)$$

где

$$d_1 = \alpha\gamma - \beta, \quad d_2 = \alpha\beta + \gamma, \quad (5)$$

$$\psi_5(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\psi}_5(t) e^{i\lambda t} dt, \quad \tilde{\psi}_5(t) \in L_2[-\pi, \pi].$$

С помощью теоремы Руше, леммы 1.4.3 книги [14] и представления (4) стандартным методом (как в [11]) легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Собственные значения μ_k ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) краевой задачи $D(\alpha, \beta, \gamma)$ при $|k| \rightarrow \infty$ удовлетворяют асимптотической формуле

$$\mu_k = k + a + \frac{A}{\pi k} + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \pi k} + \frac{\gamma_k}{k}, \quad (6)$$

где
$$a = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{d_1}{d_2}, \quad \{\gamma_k\} \in l_2.$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 2 работы [15].

Теорема 2. Задание спектра $\{\mu_k\}$ ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ краевой задачи $D(\alpha, \beta, \gamma)$ по формуле

$$\Delta(\lambda) = \pi \sqrt{d_1^2 + d_2^2} (\mu_{-0} - \lambda)(\mu_{+0} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu_k - \lambda}{k}. \quad (7)$$

Наряду с задачей $D(\alpha, \beta, \gamma)$ рассматривается также краевая задача $D(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$, порожденная тем же уравнением (1) и граничными условиями

$$\begin{aligned} y_2(0) + \alpha y_1(0) &= 0, \\ y_1(0) + \lambda [\tilde{\beta} y_1(\pi) + \tilde{\gamma} y_2(\pi)] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Спектр этой задачи будем обозначать через $\{\tilde{\mu}_k\}$.

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача Р. По заданным спектрам краевых задач $D(\alpha, \beta, \gamma)$ и $D(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ и числу α построить матрицу-функцию

$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ в уравнении Дирака (1) и коэффициенты $\beta, \gamma, \tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ в граничных условиях (2) и (8).

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 3. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_k - \tilde{\mu}_k) \neq 0$, то задание спектров $\{\mu_k\}, \{\tilde{\mu}_k\}$ и числа α однозначно определяет краевые задачи $D(\alpha, \beta, \gamma)$ и $D(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$.

Доказательство. Согласно теореме 1 собственные значения $\tilde{\mu}_k$ ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) краевой задачи $D(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ при $|k| \rightarrow \infty$ удовлетворяют асимптотической формуле

$$\tilde{\mu}_k = k + \tilde{a} + \frac{A}{\pi k} + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_2^2} \pi k} + \frac{\tilde{\gamma}_k}{k}, \quad (9)$$

где $\tilde{a} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\tilde{d}_1}{\tilde{d}_2}$, $\{\tilde{\gamma}_k\} \in l_2$,

$$\tilde{d}_1 = \alpha \tilde{\gamma} - \tilde{\beta}, \quad \tilde{d}_2 = \alpha \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}. \quad (10)$$

С помощью асимптотических формул (6) и (9) находим

$$\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \frac{1}{\pi \lim_{k \rightarrow \infty} k (\mu_{2k+1} - \mu_{2k} - 1)}, \quad \sqrt{\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_2^2} = \frac{1}{\pi \lim_{k \rightarrow \infty} k (\tilde{\mu}_{2k+1} - \tilde{\mu}_{2k} - 1)}. \quad (11)$$

Тогда по заданным последовательностям $\{\mu_k\}$ и $\{\tilde{\mu}_k\}$ можно восстановить характеристические функции $\Delta(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}(\lambda)$ краевых задач $D(\alpha, \beta, \gamma)$ и $D(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ в виде бесконечного произведения по формулам (7) и

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \pi \sqrt{\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_2^2} (\tilde{\mu}_{-0} - \lambda) (\tilde{\mu}_{+0} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}_k - \lambda}{k}. \quad (12)$$

Согласно представлению (4)

$$\begin{aligned} \Delta(2k) &= 1 - 2kd_1 - Ad_2 + \psi_5(2k), \\ \Delta\left(2k + \frac{1}{2}\right) &= 1 + \left(2k + \frac{1}{2}\right)d_2 - Ad_1 + \psi_5\left(2k + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$d_1 = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta(2k)}{2k}, \quad d_2 = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta\left(2k + \frac{1}{2}\right)}{4k + 1}. \quad (13)$$

так как в силу леммы Римана-Лебега $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_5(2k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_5\left(2k + \frac{1}{2}\right) = 0$.

Аналогично

$$\tilde{d}_1 = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\Delta}(2k)}{2k}, \quad \tilde{d}_2 = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\Delta}\left(2k + \frac{1}{2}\right)}{4k + 1}. \quad (14)$$

Зная α , d_1 , d_2 , \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 , из (5) и (10) однозначно определяются коэффициенты β , γ , $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ в граничных условиях (2) и (8) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\alpha d_2 - d_1}{\alpha^2 + 1}, & \gamma &= \frac{d_2 + \alpha d_1}{\alpha^2 + 1}, \\ \tilde{\beta} &= \frac{\alpha \tilde{d}_2 - \tilde{d}_1}{\alpha^2 + 1}, & \tilde{\gamma} &= \frac{\tilde{d}_2 + \alpha \tilde{d}_1}{\alpha^2 + 1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из условия теоремы следует, что $a - \tilde{a} \neq 0$ или $\operatorname{arctg} \frac{d_1}{d_2} \neq \operatorname{arctg} \frac{\tilde{d}_1}{\tilde{d}_2}$.

Значит, $d_1 \tilde{d}_2 - \tilde{d}_1 d_2 \neq 0$. Отсюда принимая во внимание соотношения (5) и (10), имеем $\beta \tilde{\gamma} - \tilde{\beta} \gamma \neq 0$. Это означает, что определитель системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta(\lambda) = 1 + \lambda [\beta(c_1(\pi, \lambda) - \alpha s_1(\pi, \lambda)) + \gamma(c_2(\pi, \lambda) - \alpha s_2(\pi, \lambda))], \\ \tilde{\Delta}(\lambda) = 1 + \lambda [\tilde{\beta}(c_1(\pi, \lambda) - \alpha s_1(\pi, \lambda)) + \tilde{\gamma}(c_2(\pi, \lambda) - \alpha s_2(\pi, \lambda))] \end{cases} \quad (16)$$

относительно неизвестных $\delta_1(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) - \alpha s_1(\pi, \lambda)$ и $\delta_2(\lambda) = c_2(\pi, \lambda) - \alpha s_2(\pi, \lambda)$, отличен от нуля. Решая систему (16), находим функции $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\lambda)$. Легко заметить, что $\delta_j(\lambda)$ ($j = 1, 2$) является характеристической функцией задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями $y_2(0) + \alpha y_1(0) = y_j(\pi) = 0$. Известно [1], что по последовательностям нулей функций $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\lambda)$ однозначно определяется коэффициент $Q(x)$ уравнения Дирака (1).

Таким образом, по заданным последовательностям $\{\mu_k\}$, $\{\tilde{\mu}_k\}$ и числу α полностью восстанавливаются краевые задачи $D(\alpha, \beta, \gamma)$ и $D(\alpha, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$. Теорема 3 доказана.

Согласно доказательству теоремы 3 решение обратной задачи P может быть получено по следующему алгоритму.

Алгоритм. Даны последовательности $\{\mu_k\}$ и $\{\tilde{\mu}_k\}$ – спектры краевых задач D и \tilde{D} и число α .

Шаг 1. С помощью (6) и (9) величины $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$, $\sqrt{\tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_2^2}$ вычислим по формулам (11).

Шаг 2. По последовательностям $\{\mu_k\}$ и $\{\tilde{\mu}_k\}$ построим характеристические функции $\Delta(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}(\lambda)$ в виде бесконечного произведения (7) и (12).

Шаг 3. Величины d_1, d_2, \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 определим по формулам (13) и (14).

Шаг 4. Коэффициенты $\beta, \gamma, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ граничных условий (2) и (8) восстанавливаются по соотношениям (15).

Шаг 5. Решая систему (16), однозначно находим функции

$$\delta_1(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) - \alpha s_1(\pi, \alpha), \quad \delta_2(\lambda) = c_2(\pi, \lambda) - \alpha s_2(\pi, \alpha).$$

Шаг 6. По последовательностям нулей функций $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\lambda)$ построим коэффициент $Q(x)$ уравнения Дирака (1) по известной процедуре (см., например, [1,3]).

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики –
Грант № EIF/MQM/Elm-Tehsil-1-2016-1(26)-71/05/1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т. Решение обратной задачи по двум спектрам для уравнения Дирака на конечном отрезке // ДАН Азерб. ССР, 1966, т. 22, № 7, с. 3-6.
2. Nabiev I.M. The inverse periodic problem for the Dirac operator // Proc. IMM of NAS of Azerb., 2003, v. 19, p. 177-180.
3. Albeverio S., Hryniv R., Mykutyuk Ya. Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials // Russian J. Math. Physics., 2005, v. 12, № 4, p. 406-423.
4. Гусейнов И.М., Лятифова А.Р. Об операторе преобразования для системы уравнений Дирака с суммируемыми потенциалами // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2011, т. 11, вып. 1, с. 19-24.
5. Набиев И.М. Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака // Матем. заметки, 2011, т. 89, № 6, с. 885-893.
6. Абдуллаев Т.Ш., Набиев И.М. Алгоритм восстановления оператора Дирака со спектральным параметром в граничном условии // Журн. выч. матем. и матем. физики, 2016, т. 56, № 2, с.252-258.
7. Аксау О., Mamedov Kh.R. The main equation of inverse problem for Dirac operators // U.P.B. Sci. Bull., 2017, Series A, v. 79, № 4, p. 159-168.
8. Аббаслы Н.В., Набиев И.М. Единственность восстановления системы Дирака по трем спектрам // Journal of Contemporary Applied Mathematics, 2018, v. 8, № 1, 2018, p. 3-8.
9. Kurbanov V.M., Abdullayeva A.M. Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient // Operators and Matrices, 2018, v. 12, № 4, 943-954.
10. Guo Y., Wei G., Yao R. Inverse problems for Dirac operator with the potential known on an interior subinterval // Anal. Math. Phys., 2019, v. 9, № 1, p. 155-163.
11. Ferzullazadeh A.G., Nabiev I.M. Some properties of the spectrum of the Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition // Proc. IMM of NAS of Azerb., 2020, v. 46, № 2, p. 189-196.
12. Zhang R., Yang C.F., Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for the Dirac operator with complex-valued weight and discontinuity // Journal of differential equations, 2021, v.

278, p. 100-110.

13. Güldü Y., Mişə E. On Dirac operator with boundary and transmission conditions depending Herglotz-Neuman type function // AIMS Mathematics, 2021, v. 6, № 4, p. 3686-3702.
14. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 с.
15. Маммадова Л.И., Набиев И.М. Спектральные свойства оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 237-248.

YARIMAYRILAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİRAC SİSTEMİNİN BƏRPASININ YEGANƏLİYİ

A.M.HƏSƏNLİ, L.İ.MƏMMƏDOVA, İ.M.NƏBİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə sərhəd şərtlərinin birində spektral parametrlər olan Dirac sisteminə baxılır. Spektral verilənlər üzrə bərpa etmə haqqında tərs məsələnin həlli üçün yeganəlik teoremi isbat edilmiş və alqoritm qurulmuşdur.

Açar sözlər: Dirac sistemi, məxsusi ədədlər, tərs məsələ, yeganəlik teoremi, həll alqoritmi.

UNIQUENESS OF RECOVERY OF THE DIRAC SYSTEM WITH SEMI-SEPARATED BOUNDARY CONDITIONS

A.M.HASANLI, L.I.MAMMADOVA, I.M.NABIYEV

SUMMARY

In the article we considered the Dirac system with some boundary conditions, one of which contains a spectral parameter. A uniqueness theorem is proved and an algorithm is constructed for solving the inverse problem of recovering boundary value problems from spectral data.

Keywords: Dirac system, eigenvalues, inverse problem, uniqueness theorem, solution algorithm.

SOME NOTES ON INTEGRABILITY CONDITIONS AND OPERATORS ON COTANGENT BUNDLE

¹H.ÇAYIR, ²T.SULTANOVA¹*Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, Giresun University, 28100, Giresun, Turkey. e-mail: hasim.cayir@giresun.edu.tr*²*Dep. "Algebra and Geometry", AZ1141, Baku State University, Baku, AZERBAIJAN. tsultanova92@mail.ru*

The main aim of this paper is to find integrability conditions by calculating Nijenhuis Tensors $\tilde{N}(X^H, Y^H)$, $\tilde{N}(X^H, Y^V)$, $\tilde{N}(X^V, Y^V)$ of almost complex structure $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ and to show the results of Tachibana operators applied X^H and X^C according to structure $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ in cotangent bundle $T^*(M_n)$.

Keywords: integrability conditions-Tachibana operators-horizontal lift-vertical lift-almost complex structure-cotangent bundle

Mathematics Subject Classification: Primary 15A72, 47B47 ; Secondary 53A45, 53C15

1 Introduction

The tangent bundles of differentiable manifolds are very important in many areas of mathematics and physics. The geometry of tangent bundles goes back to the fundamental paper [15] of Sasaki published in 1958. Cotangent bundle is dual of the tangent bundle. Because of this duality, some of the geometric results are similar to each other. The most significant difference between them is construction of lifts (see [16] for more details). In 1952, para-complex manifolds, almost para-Hermitian manifolds and para-Kähler manifolds were defined by Libermann[8] and In 1985, Kaneyuki and Williams defined the almost para-contact structure on a pseudo-Riemannian manifold M of dimension $2m + 1$ and constructed the almost para-complex structure on $M^{2m+1} \times R$ [7].

Let M_n be an n -dimensional differentiable manifold and $T_P^*(M_n)$ the cotangent space at a point $P \in M_n$, that is, the dual space to the tangent space $T_P(M_n)$ at P . Any element of $T_P^*(M_n)$ is called a covector at $P \in M_n$. Then the set

$$T^*(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P^*(M_n)$$

is the cotangent bundle over the manifold M_n . For any point \tilde{P} of $T^*(M_n)$ such that $\tilde{P} \in T_P^*(M_n)$, the correspondence $\tilde{P} \rightarrow P$ determines the bundle projection $\pi: T^*(M_n) \rightarrow M_n$. The set $\pi^{-1}(P)$, that is, $T_P^*(M_n)$, is called the fibre over $P \in M_n$ and M_n the base space [16].

Let f be a function on M_n . We write f^v for the function in $T^*(M_n)$ obtained by forming the composition of $\pi: T^*(M_n) \rightarrow M_n$ and $f: M \rightarrow R$, so that $f^v = f \circ \pi$. Thus, if $\tilde{P} \in T_P^*(M_n)$, then we have

$$f^v(\tilde{P}) = f(P).$$

We now easily have $(fg)^v = f^v g^v$, $(f + g)^v = f^v + g^v$ for any $f, g \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$. Thus the value of f^v is constant along each fibre. We call f^v the vertical lift of the function f [16].

Let $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(T^*(M_n))$ be such that $\tilde{X}f^v = 0$ for all $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$. Then we say \tilde{X} is a vertical vector field in $T^*(M_n)$. It is easily shown that \tilde{X} is vertical if and only if it has components of the form

$$(\tilde{X}^A) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^i \end{pmatrix}$$

i.e., $\tilde{X}^i = 0$ with respect to the induced coordinates (x^h, p_i) in each $\pi^{-1}(U)$. Generally use X^v for vertical lift \tilde{X} of X [16].

Suppose that $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ with local components ω_i in M_n , so that ω is a 1-form with local expression $\omega = \omega_i dx^i$. The ω^v has components of the form

$$(\omega^v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix}$$

with respect to the induced coordinates in $T^*(M_n)$. Clearly, we have $\omega^v(f^v) = 0$ for any $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$, so that ω^v is a vertical vector field. It is easily proved that, for any $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n)$ and $\omega, \theta \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ [16],

$$\begin{aligned} (\omega + \theta)^v &= \omega^v + \theta^v, \\ (f\omega)^v &= f^v \omega^v, \\ [\omega^v, \theta^v] &= 0. \end{aligned}$$

Let $S \in \mathfrak{S}_S^1(M_n)$ ($s \geq 1$) and suppose that γS has components $\tilde{S}_{B_s \dots B_2 B_1}$ with respect to the induced coordinates in $T^*(M_n)$. We see that γS has local expression

$$\gamma S = p_a S_{i_s \dots i_2 i_1}^a dx^{i_s} \otimes \dots \otimes dx^{i_2} \otimes \frac{\partial}{\partial p_{i_1}}$$

with respect to the induced coordinates in $\pi^{-1}(U)$, where $S_{i_s \dots i_1}^h$ are components of S in U . For any $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$, γF is a vector field with components

$$\gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ p_a F_i^a \end{pmatrix}$$

with respect to the induced coordinates on $T^*(M_n)$ [16].

Let $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, then we define a vector field X^C on $T^*(M_n)$, the components of X^C are

$$X^C = \begin{pmatrix} X^h \\ -p_i(\partial_h X^i) \end{pmatrix}$$

with respect to the induced coordinates (x^h, p_i) in $\pi^{-1}(U)$, where X^h are local components of X in M_n . We call X^C the complete lift of the vector field X to $T^*(M_n)$ [16].

Proposition 1 Let $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ and $F, G \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$, $S, T \in \mathfrak{S}_2^1(M_n)$, then [16]

$$\begin{aligned} (\gamma S)\omega^V &= 0, (\gamma S)(\gamma F) = 0, \\ (\gamma S)X^C &= \gamma S_X, (\gamma S)(\gamma T) = 0, \\ F^C\omega^V &= (\omega \circ F)^V, F^C(\gamma G) = \gamma(GF), \\ F^CX^C &= (FX)^C + \gamma(L_X F), \end{aligned}$$

where S_X is the tensor field of type (1,1) in M defined by $S_X(Z) = S(X, Z)$ for any $Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$.

Proposition 2 Let $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $\omega, \theta \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ and $F, G \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$, then [16]

$$\begin{aligned} [\omega^V, \theta^V] &= 0, [\omega^V, \gamma F] = (\omega \circ F)^V, \\ [\gamma F, \gamma G] &= \gamma F, G, [X^C, \omega^V] = (L_X \omega)^V, \\ [X^C, \gamma F] &= (L_X F), [X^C, Y^C] = [X, Y]^C, \end{aligned}$$

where $\omega \circ F$ is a 1-form defined by $(\omega \circ F)Z = \omega(FZ)$ for any $Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ and L_X the operator of Lie derivation with respect to X .

Let M_n be an n -dimensional differentiable manifold. Differential transformation of algebra $T(M_n)$, defined by

$$D = \nabla_X : T(M_n) \rightarrow T(M_n), X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n),$$

is called as covariant derivation with respect to vector field X if

$$\nabla_{fX+gY}t = f\nabla_X t + g\nabla_Y t,$$

$$\nabla_X f = Xf, \forall f, g \in \mathfrak{S}_0^0(M_n), \forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n), \forall t \in \mathfrak{S}(M_n).$$

On the other hand, a transformation defined by

$$\nabla : \mathfrak{S}_0^1(M_n) \times \mathfrak{S}_0^1(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M_n),$$

is called as affin connection [13].

Let ∇ be a symmetric affine connection in a differentiable manifold M_n . For a vector field X in M_n and a tensor field $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$, we put in the cotangent bundle $T^*(M_n)$

$$\begin{aligned} X^H &= (\nabla_X)^C, \\ F^H &= F^C + \gamma[\nabla F], \end{aligned}$$

where the right-hand side denotes the complete lift of the covariant differentiation ∇_X to $T^*(M_n)$, and call X^H the horizontal lift of the vector field of X and $[\nabla F]$ is a tensor field of type (1,2) defined by $[\nabla F](X, Y) = -\nabla_X(FY) + \nabla_Y(FX)$. Thus, we have

$$X^H = X^C + \gamma(\nabla X),$$

where $\widehat{\nabla}X = \nabla X$. The horizontal lift X^H has local components

$$X^H = \begin{pmatrix} X^h \\ \Gamma_{hi}X^i \end{pmatrix}$$

with respect to the induced coordinates (x^h, p_h) in $T^*(M_n)$, where $\Gamma_{ji} = p_a \Gamma_{ji}^a, \Gamma_{ji}^a$ being components of ∇ in M_n and $[\nabla F]_X \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ [16].

Proposition 3 Let $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n), \omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ and $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n), S \in \mathfrak{S}_2^1(M_n)$, then [16]

$$\begin{aligned} [X^H, \omega^V] &= (\nabla_X \omega), [X^H, \gamma F] = \gamma(\nabla_X F), \\ [X^H, Y^H] &= [X, Y]^H + \gamma R(X, Y), \\ [X^C, Y^H] &= [X, Y]^H + \gamma(L_X \nabla)_Y, \\ [F^C X^H] &= (FX)^H + \gamma([\nabla F]_X), \\ (\gamma S)X^H &= \gamma S_X, \end{aligned}$$

where R is the curvature tensor of ∇ and the term involving the Lie derivative on the connection ∇ is given by $(L_X \nabla)_Y = \nabla_Y \nabla X + R(X, Y)$, $[\nabla F]_X \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ is given by $[\nabla F]_X Y = (\nabla_X F)Y - (\nabla_Y F)X$.

Proposition 4 Let $f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n), X, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M_n), \omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ and $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$, then [16]

$$\begin{aligned} F^H \omega^V &= (\omega \circ F)^V, F^H X^H = (FX)^H, \\ F^H X^C &= (FX)^H - \gamma((\nabla X)F), \\ X^H \gamma Z &= \gamma(\nabla_X Z), X^H f^V = (Xf)^V. \end{aligned}$$

2. Main results

2.1 Integrability Conditions of Almost Complex Structure on $T^*(M_n)$

Let F be an almost complex structure on M_n , i.e., $F^2 = -I$. We say that F is integrable if the Nijenhuis tensor N_F of F is identically equal to zero. The Nijenhuis tensor N_F is defined by

$$N_F = [FX, FY] - F[X, FY] - F[FX, Y] + F^2[X, Y]$$

for any $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ [2, 13].

Proposition 5 Let F be an almost complex structure in M_n with the Nijenhuis tensor N_F , then

$$F^H - \gamma([\nabla F] - \frac{1}{2}(NF))$$

is an almost complex structure on $T^*(M_n)$.

Proof.

$$\begin{aligned} (F^H - \gamma([\nabla F] - \frac{1}{2}(NF)))^2 &= (F^H)^2 - F^H \gamma([\nabla F] - \frac{1}{2}(NF)) - \\ &F^H \gamma([\nabla F] - \frac{1}{2}(NF)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma([\nabla F] - \frac{1}{2}(NF))\gamma([\nabla F] - \frac{1}{2}(NF)) \\
& = (F^C + \gamma([\nabla F]))^2 - \gamma([\nabla F])F + \frac{1}{2}\gamma(NF^2) \\
& \quad - \gamma([\nabla F])F + \frac{1}{2}\gamma(NF^2) \\
& = (F^C)^2 + F^C\gamma([\nabla F]) + F^C\gamma([\nabla F]) + \gamma([\nabla F])\gamma([\nabla F]) \\
& \quad - 2\gamma([\nabla F])F + \gamma(NF^2) \\
& = (F^2)^C + \gamma N + \gamma([\nabla F])F + \gamma([\nabla F])F \\
& \quad - 2\gamma([\nabla F])F + \gamma(NF^2) \\
& = (F^2)^C + \gamma(N + NF^2) \\
& = -I^C + \gamma(N - N) \\
& = -I,
\end{aligned}$$

where F is an almost complex structure on M_n , i.e., $F^2 = -I$.

Remark 1 Let F be an almost complex structure in M_n with the Nijenhuis tensor N_F . The structure defined by

$$F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$$

is an almost complex structure in $T^*(M_n)$ [16].

Theorem 1 Let $\tilde{N}(X^H, Y^H)$ be the Nijenhuis tensor of almost complex structure $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ in $T^*(M_n)$. Then the almost complex structure $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ in $T^*(M_n)$ is integrable if and only if the following *i*), *ii*) and *iii*) conditions are required.

- i*) Almost complex structure F in M_n is integrable,
- ii*) The curvature tensor R of ∇ satisfies $R(FX, FY) = R(X, Y)$,
- iii*) $\nabla([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) = 0$ and $\nabla([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) = 0$,

where $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(X^H, Y^H) & = [(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H, (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))Y^H] \\
& \quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H, Y^H] \\
& \quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[X^H, (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))Y^H] - [X^H, Y^H] \\
& = [(FX)^H + \gamma\nabla F]_X + \frac{1}{2}\gamma(NF)_X, (FY)^H + \gamma\nabla F]_Y + \frac{1}{2}\gamma(NF)_Y] \\
& \quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(FX)^H + \gamma\nabla F]_X + \frac{1}{2}\gamma(NF)_X, Y^H] \\
& \quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[X^H, (FY)^H + \gamma\nabla F]_Y + \frac{1}{2}\gamma(NF)_Y] - [X^H, Y^H]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(FX)^H + \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X), (FY)^H + \gamma([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y)] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(FX)^H + \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X), Y^H] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[X^H, (FY)^H + \gamma([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y)] - [X^H, Y^H] \\
&= [(FX)^H, (FY)^H] + (FX)^H\gamma([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) - (FY)^H \\
&\quad + \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X)([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
&\quad - ([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y)([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))([X^H, Y^H] - Y^H\gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X)) \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))([X^H, (FY)^H] + X^H\gamma([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) - [X^H, Y^H]) \\
&= [FX, FY]^H + \gamma R(FX, FY) + \gamma \nabla_{FX}([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
&\quad - \gamma \nabla_{FY}([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + \gamma([\nabla F]_X[\nabla F]_Y + \frac{1}{2}[\nabla F]_X(NF)_Y \\
&\quad + \frac{1}{2}(NF)_X[\nabla F]_Y + \frac{1}{4}(NF)_X(NF)_Y - [\nabla F]_Y[\nabla F]_X \\
&\quad - \frac{1}{2}[\nabla F]_Y(NF)_X - \frac{1}{2}(NF)_Y[\nabla F]_X - \frac{1}{4}(NF)_Y(NF)_X) \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))([FX, Y]^H + \gamma R(FX, Y) \\
&\quad - \nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X)) \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))([X, FY]^H + \gamma R(X, FY) \\
&\quad - \nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y)) - [X^H, Y^H]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [FX, FY]^H + \gamma R(FX, FY) + \gamma \nabla_{FX}([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
&\quad - \gamma \nabla_{FY}([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + \gamma([\nabla F]_X[\nabla F]_Y + \frac{1}{2}[\nabla F]_X(NF)_Y \\
&\quad + \frac{1}{2}(NF)_X[\nabla F]_Y + \frac{1}{4}(NF)_X(NF)_Y - [\nabla F]_Y[\nabla F]_X \\
&\quad - \frac{1}{2}[\nabla F]_Y(NF)_X - \frac{1}{2}(NF)_Y[\nabla F]_X - \frac{1}{4}(NF)_Y(NF)_X) \\
&\quad - F^C [FX, Y]^H - F^C \gamma R(FX, Y) + F^C \nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\
&\quad - \frac{1}{2}\gamma(NF)[FX, Y]^H - \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(FX, Y) \\
&\quad + \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) - F^C [X, FY]^H \\
&\quad - F^C \gamma R(X, FY) - F^C \nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
&\quad - \frac{1}{2}\gamma(NF)[X, FY]^H - \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(X, FY) \\
&\quad - \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) - [X, Y]^H - \gamma R(X, Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [FX, FY]^H + \gamma R(FX, FY) + \gamma \nabla_{FX}([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
&\quad - \gamma \nabla_{FY}([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + \gamma([\nabla F]_X[\nabla F]_Y + \frac{1}{2}[\nabla F]_X(NF)_Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}(NF)_X[\nabla F]_Y + \frac{1}{4}(NF)_X(NF)_Y - [\nabla F]_Y[\nabla F]_X \\
& -\frac{1}{2}[\nabla F]_Y(NF)_X - \frac{1}{2}(NF)_Y[\nabla F]_X - \frac{1}{4}(NF)_Y(NF)_X \\
& - (F[FX, Y])^H - \gamma([\nabla F]_{[FX, Y]}) - \gamma(R(FX, Y)F) \\
& + F^C \nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) - \frac{1}{2}\gamma(NF)_{[FX, Y]} \\
& - \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(FX, Y) + \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\
& - (F[X, FY])^H - \gamma([\nabla F]_{[X, FY]}) - \gamma(R(X, FY)F) \\
& - F^C \nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) - \frac{1}{2}\gamma(NF)_{[X, FY]} \\
& - \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(X, FY) - \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
& - [X, Y]^H - \gamma R(X, Y) \\
= & ([FX, FY] - (F[FX, Y]) - (F[X, FY]) - [X, Y])^H \\
& - \gamma(R(FX, FY) - R(FX, Y)F - R(X, FY)F - R(X, Y)) \\
& - \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(FX, Y) - \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(X, FY) \\
& + \gamma(\nabla_{FX}([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y)) - F^C \nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
& - \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
& - \gamma(\nabla_{FY}([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X)) - F^C \nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\
& - \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\
& + \gamma([\nabla F]_X[\nabla F]_Y - [\nabla F]_Y[\nabla F]_X + \frac{1}{2}[\nabla F]_X(NF)_Y \\
& - \frac{1}{2}[\nabla F]_Y(NF)_X + \frac{1}{2}(NF)_X[\nabla F]_Y \\
& - \frac{1}{2}(NF)_Y[\nabla F]_X + \frac{1}{4}(NF)_X(NF)_Y - \frac{1}{4}(NF)_Y(NF)_X \\
& - [\nabla F]_{[FX, Y]} - [\nabla F]_{[X, FY]} - \frac{1}{2}(NF)_{[FX, Y]} - \frac{1}{2}(NF)_{[X, FY]}).
\end{aligned}$$

Thus we can put

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(X^H, Y^H) = & N(X, Y)^H \\
& - \gamma(R(FX, FY) - R(FX, Y)F - R(X, FY)F - R(X, Y)) \\
& - \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(FX, Y) - \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(X, FY) \\
& + \gamma(\nabla_{FX}([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y)) - F^C \nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
& - \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \\
& - \gamma(\nabla_{FY}([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X)) - F^C \nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\
& - \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + \gamma P
\end{aligned}$$

where P is the tensor field of type (1,1) in M_n given by

$$P = ([\nabla F]_X[\nabla F]_Y - [\nabla F]_Y[\nabla F]_X + \frac{1}{2}[\nabla F]_X(NF)_Y - \frac{1}{2}[\nabla F]_Y(NF)_X$$

$$+\frac{1}{2}(NF)_X[\nabla F]_Y - \frac{1}{2}(NF)_Y[\nabla F]_X + \frac{1}{4}(NF)_X(NF)_Y - \frac{1}{4}(NF)_Y(NF)_X \\ - [\nabla F]_{[FX,Y]} - [\nabla F]_{[X,FY]} - \frac{1}{2}(NF)_{[FX,Y]} - \frac{1}{2}(NF)_{[X,FY]}$$

i) Because of almost complex structure F in M_n is integrable, we get

$$N(X, Y) = 0.$$

ii) The curvature tensor R of ∇ satisfies $R(FX, FY) = R(X, Y)$ for any $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$. Thus, we get $R(FX, Y) = -R(X, FY)$ since $F^2 = -I$, we find

$$\left\{ \begin{array}{l} -\gamma(R(FX, FY) - R(FX, Y)F - R(X, FY)F - R(X, Y)) \\ -\frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(FX, Y) - \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma R(X, FY) \end{array} \right\} = 0$$

iii) If we consider the conditions of

$$\nabla([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) = 0 \text{ and } \nabla([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) = 0,$$

then we get

$$\left\{ \begin{array}{l} +\gamma(\nabla_{FX}([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y)) - F^C \nabla_X([\nabla F]_Y) \\ +\frac{1}{2}(NF)_Y - \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_X([\nabla F]_Y + \frac{1}{2}(NF)_Y) \end{array} \right\} = 0$$

and

$$\left\{ \begin{array}{l} -\gamma(\nabla_{FY}([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X)) - F^C \nabla_Y([\nabla F]_X) \\ +\frac{1}{2}(NF)_X - \frac{1}{2}\gamma(NF)\nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \end{array} \right\} = 0$$

Because of this results, the theorem is completely proved.

Theorem 2 Let $\tilde{N}(\theta^V, \omega^V)$ be the Nijenhuis tensor of almost complex structure $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ on $T^*(M_n)$ and almost complex structure F on M_n . Then the almost complex structure $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ on $T^*(M_n)$ is integrable, where $\theta, \omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n), F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$.

Proof.

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\theta^V, \omega^V) &= [(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))\theta^V, (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))\omega^V] \\ &\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))\theta^V, \omega^V] \\ &\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[\theta^V, (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))\omega^V] - [\theta^V, \omega^V] \\ &= [F^C \theta^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\theta^V, F^C \omega^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\omega^V] \\ &\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[F^C \theta^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\theta^V, \omega^V] \\ &\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[\theta^V, F^C \omega^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\omega^V] - [\theta^V, \omega^V] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(\theta oF)^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\theta^V, (\omega oF)^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\omega^V] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(\theta oF)^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\theta^V, \omega^V] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[\theta^V, (\omega oF)^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\omega^V] - [\theta^V, \omega^V] \\
&= [(\theta oF)^V, (\omega oF)^V] - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(\theta oF)^V, \omega^V] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[\theta^V, (\omega oF)^V] - [\theta^V, \omega^V] = 0
\end{aligned}$$

where $(\theta oF), (\omega oF) \in \mathfrak{S}_1^0(M_n), [\theta^V, \omega^V] = 0$. The theorem is proved.

Theorem 3 Let $\tilde{N}(X^H, \omega^V)$ be the Nijenhuis tensor of almost complex structure $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ in $T^*(M_n)$ and almost complex structure F on M_n . Then the almost complex structure $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ on $T^*(M_n)$ is integrable if and only if $\nabla F = 0$, where $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n), \omega \in \mathfrak{S}_1^0(M_n), F \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(X^H, \omega^V) &= [(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H, (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))\omega^V] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H, \omega^V] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[X^H, (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))\omega^V] - [X^H, \omega^V] \\
&= [(FX)^H + \gamma\nabla F]_X, (\omega oF)^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\omega^V] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(FX)^H + \gamma\nabla F]_X + \frac{1}{2}\gamma(NF)_X, \omega^V] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[X^H, (\omega oF)^V + \frac{1}{2}\gamma(NF)\omega^V] - [X^H, \omega^V] \\
&= [(FX)^H + \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X), (\omega oF)^V] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(FX)^H + \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X), \omega^V] \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[X^H, (\omega oF)^V] - [X^H, \omega^V] \\
&= [(FX)^H, (\omega oF)^V] - \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X)(\omega oF)^V \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[(FX)^H, \omega^V] - \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X)\omega^V \\
&\quad \quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))(\nabla_X(\omega oF))^V - (\nabla_X\omega)^V \\
&= (\nabla_{FX}(\omega oF))^V - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))(\nabla_{FX}\omega)^V \\
&\quad - (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))(\nabla_X(\omega oF))^V - (\nabla_X\omega)^V \\
&= (\nabla_{FX}(\omega oF))^V - F^C(\nabla_{FX}\omega)^V - \frac{1}{2}\gamma(NF)(\nabla_{FX}\omega)^V \\
&\quad - F^C(\nabla_X(\omega oF))^V - \frac{1}{2}\gamma(NF)(\nabla_X(\omega oF))^V - (\nabla_X\omega)^V \\
&= (\nabla_{FX}(\omega oF))^V - ((\nabla_{FX}\omega)oF))^V - ((\nabla_X(\omega oF))F)^V - \\
&\quad (\nabla_X\omega)^V \\
&= (\omega o(\nabla_{FX}F) - ((\nabla_X(\omega oF))F)^V - (\nabla_X\omega))^V.
\end{aligned}$$

If we have $\nabla F = 0$, then $F^c + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ is integrable in $T^*(M_n)$. The theorem is proved.

2.2 Tachibana operators applied X^H and X^c According to an Almost Complex Structure $F^c + \gamma \frac{1}{2}(NF)$ on $T^*(M_n)$

Let $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$, and $\mathfrak{S}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ be a tensor algebra over R . A map $\phi_\varphi \Big|_{r+s=0}^* : \mathfrak{S}(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}(M_n)$ is called as Tachibana operator or ϕ_φ operator on M_n if

a) ϕ_φ is linear with respect to constant coefficient,

b) $\phi_\varphi : \mathfrak{S}(M_n) \rightarrow \mathfrak{S}_{s+1}^r(M_n)$ for all r and s ,

c) $\phi_\varphi(K \overset{c}{\otimes} L) = (\phi_\varphi K) \otimes L + K \otimes \phi_\varphi L$ for all $K, L \in \mathfrak{S}(M_n)$,

d) $\phi_{\varphi X} Y = -(L_Y \varphi)X$ for all $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, where L_Y is the Liederivation with respect to Y (see [3, 6]),

e) $(\phi_{\varphi X} \eta)Y = (d(1_Y \eta))(\varphi X) - (d(1_Y(\eta \circ \varphi)))X + \eta((L_Y \varphi)X)$
 $= \phi X(1_Y \eta) - X(1_{\varphi Y} \eta) + \eta((L_Y \varphi)X)$

for all $\eta \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ and $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, where $1_Y \eta = \eta(Y) = \eta \overset{c}{\otimes} Y, \mathfrak{S}_s^r(M_n)$ the module of all pure tensor fields of type (r, s) on M_n with respect to the affinor field [2, 4, 5, 13](see [14] for applied to pure tensor field).

Theorem 4 Let $F^c + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ be an almost complex structure on $T^*(M_n)$ and $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, then we get the following results

$$i) \phi_{(F^c + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H} Y^H = (\phi_{FX} Y)^H + \gamma P,$$

where $P \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ and $P = -R(Y, FX) - \nabla_Y([[\nabla F]]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + [[\nabla F]]_{[Y, X]} + R(Y, X)F + \frac{1}{2}(NF)_{[Y, X]}$.

$$ii) \phi_{(F^c + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^C} Y^H = (\phi_{FX} Y)^H + \gamma P',$$

where $P' \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ and $P' = R(FX, Y) + \nabla_Y \nabla FX - \nabla_Y(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X) - [[\nabla F]]_{[X, Y]} - (R(X, Y) + \nabla_Y \nabla X)F - \frac{1}{2}(NF)_{[X, Y]}$.

$$iii) \phi_{(F^c + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H} Y^C = (\phi_{FX} Y)^H + \gamma P'',$$

where $P'' \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ and

$$P'' = -R(Y, FX) - \nabla_{FX} \nabla Y - L_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + [\nabla F]_{[Y, X]} + (R(Y, X) + \nabla_X \nabla Y)F + \frac{1}{2}(NF)_{[Y, X]}.$$

$$iv) \phi_{(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^C} Y^C = (\phi_{FX} Y)^C + \gamma P''',$$

$$\text{where } P''' \in \mathfrak{S}_1^1(M_n) \text{ and } P''' = -L_Y(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X) + L_{[Y, X]} F + \frac{1}{2}(NF)_{[Y, X]}.$$

Proof.

$$\begin{aligned} i) \phi_{(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H} Y^H &= -(L_{Y^H}(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)))X^H \\ &= -L_{Y^H}(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H + (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))L_{Y^H}X^H \\ &= -[Y^H, (FX)^H + \gamma \nabla F]_X + \frac{1}{2}\gamma(NF)_X \\ &\quad + (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[Y^H, X^H] \\ &= -[Y, (FX)]^H - [Y^H, \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X)] \\ &\quad + F^C[Y^H, X^H] + \frac{1}{2}\gamma(NF)[Y^H, X^H] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -[Y, (FX)]^H - \gamma R(Y, FX) - \gamma \nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\ &\quad + F^C([Y, X]^H + \gamma R(Y, X)) + \frac{1}{2}\gamma(NF)([Y, X]^H + \gamma R(Y, X)) \\ &= -[Y, (FX)]^H - \gamma R(Y, FX) - \gamma \nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\ &\quad + (F[Y, X])^H + \gamma \nabla F_{[Y, X]} + F^C \gamma R(Y, X) + \frac{1}{2}\gamma(NF)_{[Y, X]} \\ &= -((L_Y F)X)^H - (FL_Y X)^H - \gamma R(Y, FX) \\ &\quad - \gamma \nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + (FL_Y X)^H + \gamma \nabla F_{[Y, X]} \\ &\quad + \gamma R(Y, X)F + \frac{1}{2}\gamma(NF)_{[Y, X]} \\ &= -((L_Y F)X)^H + \gamma(-R(Y, FX) - \nabla_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\ &\quad + [\nabla F]_{[Y, X]} + R(Y, X)F + \frac{1}{2}(NF)_{[Y, X]}) \\ &= -((L_Y F)X)^H + \gamma P \\ &\quad = (\phi_{FX} Y)^H + \gamma P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \phi_{(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^C} Y^H &= -(L_{Y^H}(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)))X^C \\ &= -L_{Y^H}(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^C + (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))L_{Y^H}X^C \\ &= -[Y^H, (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^C] + (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[Y^H, X^C] \\ &= -[Y^H, F^C X^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)X^C] + F^C[Y^H, X^C] + \frac{1}{2}\gamma(NF)[Y^H, X^C] \\ &= -[Y^H, (FX)^C + \gamma(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X)] \\ &\quad + F^C(-[X, Y]^H - \gamma(R(X, Y) + \nabla_Y \nabla X)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}\gamma(NF)(-[X, Y]^H - \gamma(R(X, Y) + \nabla_Y \nabla X)) \\
& = -[Y^H, (FX)^C] - [Y^H, \gamma(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X)] \\
& -F^C[X, Y]^H - F^C\gamma(R(X, Y) + \nabla_Y \nabla X) - \frac{1}{2}\gamma(NF)[X, Y]^H \\
& = [FX, Y]^H + \gamma(R(FX, Y) + \nabla_Y \nabla FX) \\
& -\gamma\nabla_Y(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X) - (F[X, Y])^H - \gamma([\nabla F]_{[X, Y]}) \\
& -\gamma(R(X, Y) + \nabla_Y \nabla X)F - \frac{1}{2}\gamma(NF)_{[X, Y]} \\
& = -((L_Y F)X)^H - (FL_Y X)^H + (FL_Y X)^H \\
& +\gamma(R(FX, Y) + \nabla_Y \nabla FX - \nabla_Y(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X) - [\nabla F]_{[X, Y]} - \\
& (R(X, Y) + \nabla_Y \nabla X)F - \frac{1}{2}(NF)_{[X, Y]}) = (\phi_{FX}Y)^H + \gamma P'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii) \phi_{(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H} Y^C & = -(L_Y c(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)))X^H \\
& = -L_Y c(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H + (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))L_Y cX^H \\
& = -[Y^C, (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^H] + (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[Y^C, X^H] \\
& = -[Y^C, (FX)^H + \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}\gamma(NF)_X)] + F^C[Y^C, X^H] \\
& \quad + \frac{1}{2}\gamma(NF)[Y^C, X^H] \\
& = -[Y^C, (FX)^H] - [Y^C, \gamma([\nabla F]_X + \frac{1}{2}\gamma(NF)_X)] + F^C([Y, X]^H \\
& +\gamma(R(Y, X) + \nabla_X \nabla Y) + \frac{1}{2}\gamma(NF)([Y, X]^H + \gamma(R(Y, X) + \nabla_X \nabla Y))) \\
& = -[Y, FX]^H - \gamma(R(Y, FX) + \nabla_{FX} \nabla Y) - \gamma L_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) \\
& \quad + F^C[Y, X]^H + F^C\gamma(R(Y, X) + \nabla_X \nabla Y) + \frac{1}{2}\gamma(NF)[Y, X]^H \\
& \quad + \frac{1}{2}\gamma(NF)\gamma(R(Y, X) + \nabla_X \nabla Y) \\
& = -((L_Y F)X)^H - (FL_Y X)^H - \gamma(-R(Y, FX) - \nabla_{FX} \nabla Y) \\
& -\gamma L_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + (FL_Y X)^H + \gamma \nabla F_{[Y, X]} \\
& +\gamma((R(Y, X) + \nabla_X \nabla Y)F) + \frac{1}{2}\gamma(NF)_{[Y, X]} \\
& = -((L_Y F)X)^H - (FL_Y X)^H + (FL_Y X)^H \\
& +\gamma(-R(Y, FX) - \nabla_{FX} \nabla Y - L_Y([\nabla F]_X + \frac{1}{2}(NF)_X) + [\nabla F]_{[Y, X]} \\
& +(R(Y, X) + \nabla_X \nabla Y)F + \frac{1}{2}(NF)_{[Y, X]}) = (\phi_{FX}Y)^H + \gamma P''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iv) \phi_{(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^C} Y^C & = -(L_Y c(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)))X^C \\
& = -L_Y c(F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^C + (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))L_Y cX^C \\
& = -[Y^C, (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))X^C] + (F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF))[Y^C, X^C] \\
& = -[Y^C, (FX)^C + \gamma(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X)] + F^C[Y^C, X^C]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}\gamma(NF)[Y^C, X^C] \\
= & -[Y^C, (FX)^C] - [Y^C, \gamma(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X)] + F^C[Y, X]^C \\
& + \frac{1}{2}\gamma(NF)[Y, X]^C \\
= & -[Y, FX]^C - \gamma(L_Y(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X) + (F[Y, X])^C \\
& + \gamma L_{[Y, X]}F + \frac{1}{2}\gamma(NF)_{[Y, X]} \\
= & -((L_Y F)X)^C - (FL_Y X)^C + (FL_Y X)^C \\
& + \gamma(-L_Y(L_X F + \frac{1}{2}(NF)_X) + L_{[Y, X]}F + \frac{1}{2}(NF)_{[Y, X]}) \\
& = (\phi_{FX}Y)^C + \gamma P^m.
\end{aligned}$$

The theorem is proved.

REFERENCES

1. Blair, DE: Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Math, 509, Springer Verlag, New York (1976).
2. Çayır, H: Some Notes on Lifts of Almost Paracontact Structures, American Review of Mathematics and Statistics, 3 (1), 52-60 (2015).
3. Çayır, H: Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to X^V and X^H on tangent bundle $T(M)$, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 42 (1), 38-49 (2016).
4. Çayır, H: Tachibana and Vishnevskii Operators Applied to X^V and X^C in Almost Paracontact Structure on Tangent Bundle $T(M)$, Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, Ordu Üniversitesi, 6 (1), 67-82 (2016).
5. Çayır, H: Tachibana and Vishnevskii Operators Applied to X^V and X^H in Almost Paracontact Structure on Tangent Bundle $T(M)$, New Trends in Mathematical Sciences, 4 (3), 105-115 (2016).
6. Çayır, H, Köseoğlu, G: Lie Derivatives of Almost Contact Structure and Almost Paracontact Structure With Respect to X^C and X^V on Tangent Bundle $T(M)$, New Trends in Mathematical Sciences, 4 (1), 153-159 (2016).
7. Kaneyuki, S, Williams, FL: Almost Para-Contact and Para-Hodge Structures on Manifolds, Nagoya Math. J. 99, 173-187 (1985).
8. Libermann, P: Sur les Structures Presque Para-Complexes, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 234, 2517-2519 (1952).
9. Das, Lovejoy, S: Fiberings on almost r-contact manifolds, Publicationes Mathematicae, Debrecen, Hungary 43, 161-167 (1993).
10. Ocak, F, Salimov, AA: Geometry of the cotangent bundle with Sasakian metrics and its applications, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 124 (3), 427-436 (August 2014).
11. Oproiu, V: Some remarkable structures and connexions, defined on the tangent bundle, Rendiconti di Matematica, 3, 6 VI (1973).
12. Omran, T, Sharffuddin, A, Husain, SI: Lift of Structures on Manifolds, Publications de l'Institut Mathematique, Nouvelle serie, 360 (50), 93 - 97 (1984).
13. Salimov, AA: Tensor Operators and Their applications, Nova Science Publ., New York (2013).
14. Salimov, AA, Çayır, H: Some Notes On Almost Paracontact Structures, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Des Sciences, 66(3) (2013) 331-338.

15. Sasaki, S: On The Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds, Tohoku Math. J. 10, 338-358 (1958).
16. Yano, K, Ishihara, S: Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Dekker Inc, New York (1973).

KOTOXUNAN LAYLANMADA İNTEQRALLANMA VƏ OPERATORLAR HAQQINDA BƏZİ QEYDLƏR

H.ÇAYIR, T.SULTANOVA

XÜLASƏ

Bu məqalənin əsas məqsədi $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ sanki kompleks struktur üçün Neyenxoys tenzorunun $\tilde{N}(X^H, Y^H)$, $\tilde{N}(X^H, Y^V)$, $\tilde{N}(X^V, Y^V)$ qiymətlərini hesablamaqla strukturun inteqrallama şərtlərini və bu struktura görə təyin olunmuş Taçibana operatorunun X^H və X^C lift vektorlarına tətbiqinin nəticələrini tapmaqdır.

Açar sözlər: ineqrallama şərtləri, Taçibana operatoru, üfuqi lift, şaquli lift, sanki kompleks struktur, kotoxunan laylanma

Riyazi elmlərin təsnifatı: Birinci 15A72, 47B47; İkinci 53A45, 53C15

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УСЛОВИЯХ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И ОПЕРАТОРАХ КОКАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ

Х.ЧАЙЫР, Т.СУЛТАНОВА

РЕЗЮМЕ

Основная цель данной статьи - найти условия интегрируемости путем вычисления тензоров Нейенхейса $\tilde{N}(X^H, Y^H)$, $\tilde{N}(X^H, Y^V)$, $\tilde{N}(X^V, Y^V)$ почти комплексной структуры $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ и показать результаты применения операторов Тачибаны к X^H и X^C относительно структуры $F^C + \frac{1}{2}\gamma(NF)$ в кокасательном расслоении $T^*(M_n)$.

Ключевые слова: условие интегрируемости, оператор Тачибаны, горизонтальный лифт, вертикальный лифт, почти комплексная структура, кокасательное расслоение.

Классификация Предметов Математики: Главная 15A72, 47B47; Вторичная 53A45, 53C15

УДК 517.9

**ÜÇÜNCÜ TƏRTİB DİSKRET ADDİTİVO-POVERATİVO-
MULTİPLİKATİV TÖRƏMƏLİ TƏNLİK ÜÇÜN KOŞI VƏ SƏRHƏD
MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI**

N.Ə.ƏLİYEV¹, A.M.MƏMMƏDZADƏ²,

¹*Bakı Dövlət Universiteti*

²*Lənkəran Dövlət Universiteti*

mammadzada.aygun@mail.ru

Burada üç müxtəlif diskret törəmə tutan bir tənlik üçün Koşi və məsələlərinin həlləri təyin ediləcəkdir. Bunun üçün əvvəlcə baxılan tənliyin ixtiyari üç sabitdən asılı olan ümumi həlli alınacaq, sonar isə baxılan məsələnin həlli müəyyən ediləcəkdir. Hər iki halda məsələnin həlli üçün analitik ifadə alınacaqdır.

Açar sözlər: Diskret additiv, multiplikativ və poverativ törəmə, diskret qeyri-xətti Koşi və sərhəd məsələsi, ardıcılığın təyini.

Giriş: Diskret additiv törəməli tənliklər üçün məsələlər (xətti məsələlər) yaxşı araşdırılmışdır [1] – [3]. Diskret multiplikativ törəməli tənliklər son zamanlar araşdırılmağa başlanılmışdır [4] – [6]. Diskret poverativ törəməli tənliklər isə yenidən araşdırılmağa başlanılmışdır [7] – [8]. Qeyd edək ki, diskret additivo-multiplikativ, multiplikativo-additiv, multiplikativo-poverativ və poverativo-multiplikativ törəməli tənliklər üçün məsələlərə də axır vaxtlar baxılmağa başlanılmışdır [9] – [14].

Burada isə yuxarıda söylədiyimiz bütün üç diskret törəməni özündə saxlayan tənlik üçün məsələlərin həlli araşdırılacaqdır.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi məsələyə baxaq:

$$((y_n^{(l)})^{\{l\}})^{[l]} = f_n, \quad n \geq 0, \quad (1)$$

burada $f_n, n \geq 0$ verilmiş ardıcılıq, $y_n, n \geq 0$ isə axtarılan ardıcılıqdır. Belə ki, (1)-də diskret additiv törəmənin diskret poverativ törəməsinin, diskret multiplikativ törəməsindən alınan üçüncü tərtib törəməli bir tənlik verilmişdir. Bu tənliyin ümumi həllinin tapılması ilə məşğul olaq. Əvvəlcə diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etsək alarıq:

$$\frac{(y_{n+1}^{(l)})^{\{l\}}}{(y_n^{(l)})^{\{l\}}} = f_n, \quad n \geq 0. \quad (2)$$

Burada n dəyişəninə sıfırdan başlayaraq, $(n-1)$ -ə qədər qiymətlər versək,

aşağıdakı ifadələri almış olarıq:

$$\begin{aligned} \frac{(y_1^{(I)})^{\{I\}}}{(y_0^{(I)})^{\{I\}}} &= f_0, \\ \frac{(y_2^{(I)})^{\{I\}}}{(y_1^{(I)})^{\{I\}}} &= 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{(y_n^{(I)})^{\{I\}}}{(y_{n-1}^{(I)})^{\{I\}}} &= f_{n-1}. \end{aligned}$$

Bu ifadələri vursaq, sadələşmədən sonra alarıq:

$$(y_n^{(I)})^{\{I\}} = (y_0^{(I)})^{\{I\}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k, \quad n \geq 0. \quad (3)$$

Qeyd edək ki, $n=0$ olduqda (3) ifadəsi eyniliyə çevrilir. Ona görə də (3)-də əsasən $n \geq 1$ olduğu qəbul olunur. Aldığımız (3) tənliyinin sol tərəfi üçün diskret poverativ törəmənin tərifiindən istifadə etsək, alarıq:

$$y_n^{(I)} \sqrt{y_{n+1}^{(I)}} = (y_0^{(I)})^{\{I\}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k,$$

və ya

$$y_n^{(I)} = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_{n-1}^{(I)}} \cdot (\prod_{k=0}^{n-2} f_k)^{y_{n-1}^{(I)}}, \quad n \geq 2. \quad (4)$$

Burada n -ə qiymətlər versək, alarıq:

$$\begin{aligned} y_2^{(I)} &= y_3 - y_2 = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_1^{(I)}} \cdot f_0^{y_1^{(I)}}, \\ y_3^{(I)} &= y_4 - y_3 = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_1^{(I)}} \cdot (\prod_{k=0}^1 f_k)^{y_2^{(I)}} = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{(y_0^{(I)})^{\{I\}}} \cdot y_1^{(I)}. \\ &\quad (\prod_{k=0}^1 f_k)^{((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_1^{(I)}} \cdot f_0^{y_1^{(I)}}}, \\ &\quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$y_{n-1}^{(I)} = y_n - y_{n-1} = ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_{n-2}^{(I)}} \cdot (\prod_{k=0}^{n-3} f_k)^{y_{n-2}^{(I)}}.$$

Bu ifadələri topladıqda isə

$$y_n = y_2 + \sum_{s=1}^{n-2} ((y_0^{(I)})^{\{I\}})^{y_s^{(I)}} \cdot (\prod_{k=0}^{s-1} f_k)^{y_s^{(I)}}, \quad n \geq 3. \quad (5)$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış olarıq.

Teorem 1. Əgər $f_n, n \geq 0$ verilmiş ardıcılıqdırsa, onda (1)-in ixtiyari həlli (5) vasitəsi ilə verilir.

Koşi məsələsi: Əgər

$$y_0 = \alpha, y_1 = \beta, y_2 = \gamma, \quad (6)$$

şərtləri verilərsə, onda (1), (6) Koşi məsələsinin həlli

$$y_n = \gamma + \sum_{s=1}^{n-2} ((\beta - \alpha) \sqrt{\gamma - \beta})^{y_{s+1} - y_s} \cdot (\prod_{k=0}^{s-1} f_k)^{y_{s+1} - y_s}, \quad n \geq 3, \quad (7)$$

ifadəsi ilə verilmiş olur.

Belə ki, $n=3$ olarsa,

$$\begin{aligned} y_3 &= \gamma + \sum_{s=1}^1 ((\beta - \alpha) \sqrt{\gamma - \beta})^{y_{s+1} - y_s} \cdot (\prod_{k=0}^{s-1} f_k)^{y_{s+1} - y_s} = \\ &= \gamma + ((\beta - \alpha) \sqrt{\gamma - \beta})^{y_2 - y_1} \cdot f_0^{y_2 - y_1} = \gamma + (\gamma - \beta)^{\frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha}} \cdot f_0^{\gamma - \beta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Əgər (7)-də $n=4$ qəbul etsək:

$$\begin{aligned}
 y_4 &= \gamma + \sum_{s=1}^2 \left(\beta^{-\alpha} \sqrt{\gamma - \beta} \right)^{y_{s+1}-y_s} \cdot \left(\prod_{k=0}^{s-1} f_k \right)^{y_{s+1}-y_s} = \\
 &= \gamma + \left(\beta^{-\alpha} \sqrt{\gamma - \beta} \right)^{y_2-y_1} \cdot f_0^{y_2-y_1} + \left(\beta^{-\alpha} \sqrt{\gamma - \beta} \right)^{y_3-y_2} \cdot (f_0 \cdot f_1)^{y_3-y_2} = \\
 &= \gamma + \left(\beta^{-\alpha} \sqrt{\gamma - \beta} \right)^{\gamma-\beta} \cdot f_0^{\gamma-\beta} + \left(\beta^{-\alpha} \sqrt{\gamma - \beta} \right)^{\gamma+(\gamma-\beta)\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\gamma-\beta} \cdot (f_0 \cdot \\
 &\quad f_1)^{(\gamma-\beta)\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\gamma-\beta} = \gamma + (\gamma - \beta)^{\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\gamma-\beta} + \\
 &\quad + (\gamma - \beta)^{\frac{(\gamma-\beta)\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha}} \cdot (f_0 \cdot f_1)^{(\gamma-\beta)\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}} \cdot f_0^{\gamma-\beta}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Teorem 2. Əgər f_n , $n \geq 0$ verilmiş ardıcılıq, α, β və γ verilmiş sabitlərdirsə, onda (1), (6) Koşi məsələsinin həlli (8), (9)-dan göründüyü kimi (5)-dən alınır.

Bu qayda ilə bütün y_n -lər (7)-dən addım-addım alınır.

İndi isə (1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y_1^{(I)} = \alpha_1, (y_0^{(I)})^{\{I\}} = \beta, y_m = \gamma. \quad (10)$$

Onda (3)-dən alırıq:

$$(y_0^{(I)})^{\{I\}} = \beta \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k \equiv F_n, \quad (11)$$

Burada poverativ törəmənin tərifindən istifadə etsək:

$$y_n^{(I)} \sqrt{y_{n+1}^{(I)}} = F_n,$$

və ya

$$y_{n+1}^{(I)} = F_n y_n^{(I)}, \quad n \geq 1. \quad (12)$$

Koşi məsələsində olduğu kimi burada da n -ə qiymətlər versək, alırıq:

$$\begin{aligned}
 y_2^{(I)} &= y_3 - y_2 = F_1 y_1^{(I)} = F_1^\alpha, \\
 y_3^{(I)} &= y_4 - y_3 = F_2 y_2^{(I)} = F_2 F_1^\alpha, \\
 y_4^{(I)} &= y_5 - y_4 = F_3 y_3^{(I)} = F_3 F_2 F_1^\alpha, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$y_n^{(I)} = y_{n+1} - y_n = F_{n-1} F_{n-2} \dots F_2 F_1^\alpha.$$

Bunları cəmləsək, alırıq:

$$y_{n+1} = y_3 + \sum_{k=2}^{n-1} F_k F_{n-1} \dots F_2 F_1^\alpha. \quad (13)$$

Burada axırıncı sərhəd şərtini nəzərə alaq. Yəni $n=m-1$ qəbul etsək:

$$\gamma = y_m = y_3 + \sum_{k=2}^{n-1} F_k F_{n-1} \dots F_2 F_1^\alpha. \quad (14)$$

olduğunu alırıq. Onda (14)-dən y_3 -ü

$$\begin{aligned}
 y_3 &= \gamma - \sum_{k=2}^{m-2} F_k F_{n-1} \dots F_2 F_1^\alpha + \sum_{k=2}^{n-1} F_k F_{n-1} \dots F_2 F_1^\alpha = \\
 &= \gamma - \sum_{k=n-1}^{m-2} F_k F_{n-1} \dots F_2 F_1^\alpha, \quad (15)
 \end{aligned}$$

ifadəsini almış oluruq.

Verilmiş (10) sərhəd şərtlərindən:

$$y_2 - y_1 = \alpha, y_1 - y_0 = \log_{\beta} \alpha, y_m = \gamma$$

olduğu alınır. Onda (15)-dən y_1 üçün

$$y_1 = \gamma - \sum_{k=0}^{m-1} F_k \cdot F_1^{\alpha}$$

ifadəsini nəzərə alsaq,

$$y_0 = y_1 - \log_{\beta} \alpha, y_2 = y_1 + \alpha$$

olduğu alınır ki, doğrudan da bütün y_k - lərin alınacağı asanlıqla görünür.

Beləliklə, alırıq:

Teorem 3. Əgər $f_n, n \geq 0, \alpha, \beta$ və γ verilmiş sabitlədirsə, onda (1), (10) sərhəd məsələsinin həlli (15) vasitəsi ilə verilmiş olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967, 376 с.
2. Aliev N., Bagirov G., İzadi F.A. Discrete additive analysis, Book, Tarbiat Moallem University publishers, Tabriz, İran, 1993, pg.144.
3. Aliyev N.A., Fatemi M.R. On discrete derivative and integrals, News of Baku University, series of physico-mathematical sciences, №36 20146 pg.45-49.
4. Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi, "Ali təhsildə keyfiyyətin təminatı" mövzusunda Respublika Elmi Konfransının Materialları, Lənkəran, 2016, s. 4-5.
5. Əliyev N.Ə., Bağirov Q.A., İsayeva A.N. Diskret multiplikativ analiz, "Riyaziyyat, informatika və iqtisadiyyatın müasir problemləri" mövzusunda respublika elmi konfransının materialları, Bakı, 2010, s. 24-30.
6. Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi, BU-nin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, №1, 2017, s.15-19.
7. Aliyev N.A., İbrahimov N.S., Mammadzadə A.M. On a solution of the Cauchy problem for the discrete equation with powerative-multiplicative-additive derivatives. XXXI International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2018) Abstracts, pg.16-17.
8. Əliyev Nihan, Məmmədşadə Aygün. İkinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həlli, Elmi Xəbərlər, Təbiət elmləri №1, 2018, s.55-58.
9. Hassani O.H., Aliev N. Analytic Approach to Solve Specific Linear and Nonlinear Differential Equations, Jnt. Math. Forum Journal for Theory and Applications, 33-36 (2008) Vol. 3, pg. 1623-1631.
10. Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S., Problems for the equation with third-order additive multipliers. "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı Respublika Elmi Konfransının Materialları, Bakı-2016, 17-18.
11. Əliyev N.Ə., İbrahimov N.S., Məmmədşadə A.M. Diskret poverativo-multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlər. Azərbaycan Texniki Universiteti, Elmi Əsərlər, Texnika Elmləri, Bakı, 2018, s.90-94.
12. Aliyev N.A., İbrahimov N.S., Mammadzadə A.M. Solution of Couchy and boundary problems for the third compilation discrete additive-multiplicative-powerative derivative equation, ВІСНИК Київського Національного Університетуімені Тараса Шевченка, Київ, 2018, №1, pg., 50-55.
13. Aliyev N.A., İbrahimov N.S., Mammadzadə A.M., Solution of Couchy problem for a discrete powerative derivative cubic equation, XXXV International Conference Problems of

Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2020) ABSTRACTS, Baku-Sheki, Republic of Azerbaijan, (May 11-15, 2020), pg. 13-15.

14. Mammadzade Aygun Malik, Solution of Cauchy and boundary value problems for a discrete powerative derivative cubic equation, вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2020. № 1, pg.24-30.

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ И УРАВНЕНИЙ КОШИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДИСКРЕТНО АДДИТИВНЫХ ПОВЕРАТИВНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Н.А.АЛИЕВ, А.М.МАММЕДЗАДЕ

РЕЗЮМЕ

В данной работе будут рассматриваться решения Коши и задачи для уравнений содержащие три различные дискретные производные. Для этого сначала находится общее решение рассматриваемого уравнения, которое зависит от трех любых постоянных, затем находится решение данной задачи. В обоих случаях получится аналитическое решение задач.

Ключевые слова: Дискретно аддитивная производная, дискретно мультипликативная производная, дискретно поверативная производная, дискретно нелинейная и граничная задача Коши, установление последовательности.

INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF CAUCHY AND BOUNDARY PROBLEMS FOR THE THIRD ORDER DISCRETE ADDITIVE-POVERATIVE-MULTIPLICATIVE DERIVATIVE EQUATION

N.A.ALIYEV, A.M.MAMMADZADE

SUMMARY

Here we will determine the solutions of Cauchy boundary problems for an equation containing three different discrete derivatives. To do this, first obtain a general solution of the equation under consideration, which depends on any three constants, and then determine the solution of the problem under consideration. In both cases? An analytical statement will be taken to resolve the issue.

Keywords: Diskret additive derivative, discrete multiplicative derivative, discrete poverative derivative, discrete nonlinear Cauchy and boundary value problem, definition of sequence.

MEXANİKA

UDC 531+539.3

DETERMINATION OF THE LIMIT STATE
OF A NONLINEAR ELASTIC ECCENTRIC RINGM.F.MEKHTIYEV¹, L.F.FATULLAYEVA²,
N.I.FOMINA³, L.H.KHALILOVA⁴^{1,2,3} *Baku State University*⁴ *Russian University of Transport (RUT MIIT)*^{1,2,3} *laura_fat@rambler.ru*⁴ *kvm_miit@mail.ru*

The aim of this work is to study the limit state of a multilayer eccentric ring made of a nonlinear elastic material and subjected to uniform external pressure. In this case, it is very important to calculate the critical buckling force depending on the parameter that characterizes different-walled shells, the presence of which can be explained, for example, by the inaccuracy of the manufacture of the product. To solve this problem, we will use the principle of calculus of variations with the method of Relay-Ritz.

Keywords: a multilayer eccentric ring, the different-walled parameter, critical force, the Relay-Ritz method, the voltage, the non-linearity indicator.

Introduction. The relevance and importance of this article is related to the search for reserves of material savings with a simultaneous increase in the load-bearing capacity of pipes. The complexity of this study is that for a number of important applications, pipes need to be represented as different-walled shells with an initial imperfection. At the same time, the latter tends to grow under the influence of the load and, starting from a certain value, the growth of deflections can become catastrophically large. This circumstance leads to the need to take into account the geometric nonlinearity. In various designs, difference rings are used as load-bearing elements, the material of which has the property of nonlinear elasticity. In this connection, it is of interest to analyze the buckling of such elements. The presence of a difference in thickness is inherent in almost all operated pipes. The analysis of the buckling process of multilayer rings made of a nonlinear elastic material is very important, due to the wide distribution and use of compressed structural elements in various fields of technology. Despite numerous studies in this area

[1, 2, 3], the influence of the different-walled parameter on the values of critical forces remains poorly understood. The task set here is devoted to this aspect.

1. Getting the basic ratios. Let's define a polar coordinate system (z, θ) and introduce an eccentric ring of radius R and thickness $2h(\theta)$ (Fig. 1). Let's assume that it is composed of s alternating layers of different thickness, the boundaries of which are circles of the same eccentricity. The thickness of each layer is denoted by $\delta_k(\theta)$. Thus, $\delta_1(\theta) + \delta_2(\theta) + \dots + \delta_s(\theta) = 2h(\theta)$. We define the contact conditions between the layers of the package, which consist in their rigid coupling. This implies the equality of their displacements, stresses, and the absence of mutual pressure of the layers. In the future, we will be guided by the hypotheses of flat Kirchhoff-Love sections, under which the conditions of a rigid connection are fulfilled automatically.

The different-walled ring will be approximated by the expression

$$h(\theta) = h_0(1 + \lambda \sin \theta), \quad (1)$$

where λ is the different-walled parameter. From geometric considerations, it follows that $\lambda \in [0, 1)$, and $\delta_j(\theta) = \delta_{j0}(1 + \lambda \sin \theta)$, here h_0 and δ_{j0} are the characteristic thicknesses of the ring and the j -th layer, respectively.

To describe the physical properties of the ring material, we will use the equation of state of the nonlinear theory of elasticity, which we will write as:

$$e^\Phi = \frac{\sigma}{E_{k+1}} \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0} \right)^n \right\} \quad a_k \leq z \leq a_{k+1}, \quad (2)$$

where σ is the voltage, n is the non-linearity indicator that takes even values (2, 4, 6, ...), E_{k+1} and σ_{k+1}^0 [$k = 0, 1, \dots, (s-1)$], respectively, the elastic modulus and the limit of proportionality of the material k layer. In (2) the notation is introduced:

$$a_k = -h + \sum_{j=0}^k \delta_j(\theta) \quad (\delta_0 = 0).$$

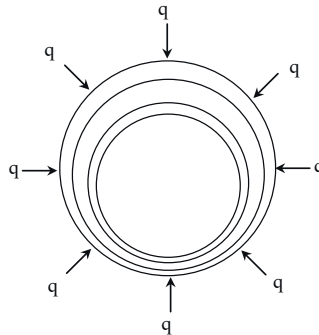


Fig. 1. The model of the considered eccentric ring.

Note that for $n = 2$ equation (2) is a fairly good approximation of the law of elasticity for reinforced plastics, some aluminum alloys, duralumin, etc. The value $n = 4$ corresponds to the diagram of linear hardening. At sufficiently large values n , the relation (2) approximates the law of ideal plasticity (Prandtl's scheme).

Let us now denote by v and w , respectively, the movement in the azimuthal direction and the deflection. The theory of thin rings proposed here is based on the following assumptions:

- a) in the process of deformation, the geometric nonlinearity in v and w is taken into account at the same time. It should be noted that, all other things being equal, taking into account the complete nonlinearity allows the most rational use of the load-bearing capacity of structures [4];
- b) buckling occurs in the plane of the ring;
- c) due to the thinness of the wall, the thickness stress σ varies linearly.

Note that the applicability and accuracy of the latter assumption is justified in [5]. The solution of the problem is possible by means of the variational method of the mixed type [6].

Given hypothesis a), the functional used has the form:

$$\begin{aligned} K = R \int_{-h(\theta)}^{h(\theta)} \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} - \dot{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} + \dot{w} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \dot{\sigma} \dot{\varepsilon}^\Phi \right\} dz d\theta + R \int_0^{2\pi} \dot{w} d\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

where ε is the strain tensor. The point here and hereafter refers to the differentiation by q

($\dot{q} = 1$). Given the expression (2), the functional (3) is rewritten as follows:

$$\begin{aligned} K = R \int_{-h(\theta)}^{h(\theta)} \int_0^{2\pi} \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} - \dot{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} + \dot{w} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-h(\theta)}^{h(\theta)} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}} \left\{ 1 + (n+1) \left(\frac{\sigma}{\sigma_{k+1}} \right)^n \right\} dz d\theta + R \int_0^{2\pi} \dot{w} d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Due to the hypothesis of flat sections, we have:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \kappa z.$$

Here ε_0 and the change in curvature κ are determined by the formulas

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)^2 \right\}, \quad (5)$$

$$\kappa = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \quad (6)$$

accordingly, as follows from the equations of the theory of thin shells. Following the assumption c), the stress distribution over the thickness is assumed to be linear:

$$\sigma = -\frac{qR}{2h_0} + c(q) \frac{z}{h_0} \cos l\theta \quad (7)$$

It is important to note that the approximation (7) needs to be refined in order to determine those λ in which it is satisfactory or there is a need to represent it in the form

$$\sigma = -\frac{qR}{2h(\theta)} + c(q) \frac{z}{h(\theta)} \cos l\theta. \quad (8)$$

Next, we take the approximating functions as

$$w = w_0(q) + w_1(q) \cos l\theta, \quad v = v_0(q) \sin l\theta. \quad (9)$$

Differentiating relations (5), (6), (8), (9) and substituting the obtained relations and formula (8) into (4), after a series of calculations, we find:

$$\begin{aligned} K = & -2\pi w_0 \dot{w}_0 - (l^2 + 1)\pi v_0 \dot{v}_0 - (l^2 + 1)\pi w_1 \dot{w}_1 - 2\pi l v_0 \dot{w}_1 - 2\pi l \dot{v}_0 w_1 + \\ & + \frac{2\pi h_0^2 l^2}{3R} \dot{c} \dot{w}_1 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) + \frac{2\pi h_0^2 l}{3R} \dot{c} \dot{v}_0 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) - \frac{\pi q}{2} (l^2 + 1) \dot{w}_1^2 - \frac{\pi q}{2} (l^2 + 1) \dot{v}_0^2 - \\ & - 2\pi q l \dot{w}_1 \dot{v}_0 - \pi q \dot{w}_0^2 - \frac{\pi R^3}{4h_0^2} \Phi_0 - \frac{2\pi R \dot{c}^2}{h_0^2} \Phi_2 - \sum_{p=0}^n \left(\frac{R^3}{2} \Phi_p^v M_{p-n-1} - 2R^2 \Phi_{p+1}^v M_{p-n} \dot{c} + \right. \\ & \left. + 2R \Phi_{p+2}^v M_{p-n+1} \dot{c}^2 \right) \cdot \frac{C_n^p (n+1) (-1)^{n-p} q^{n-p} R^{n-p}}{2^{n-p} h_0^{n+2}} \cdot c^p, \end{aligned}$$

where, for the sake of brevity, the following notation is entered:

$$\Phi_i = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^i dz, \quad \Phi_p^v = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1} (\sigma_{k+1}^0)^n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^p dz,$$

$$M_{p-n+j} = \left[1 - (-1)^{p+j+2} \right] \int_0^{2\pi} (1 + \lambda \sin \theta)^{p-n+j} \cos^{p+j+1} l \theta d\theta, \quad j = -1, 0, 1;$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Here \dot{w}_0 , \dot{w}_1 , \dot{v}_0 and \dot{c} are independent variable values.

2. Solution of the received problem. Equating to

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{w}_0} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{w}_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{v}_0} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{c}} = 0,$$

we get a system of four ordinary differential equations, which we give in a form that is convenient for subsequent integration. Omitting the elementary calculations, we get:

$$-2\pi w_0 - 2\pi q \dot{w}_0 = 0,$$

$$-(l^2 + 1)\pi w_1 - 2\pi \dot{v}_0 + \frac{2\pi h_0^2 l^2}{3R} \dot{c} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right) - \pi q (l^2 + 1) \dot{w}_1 - 2\pi q l \dot{v}_0 = 0,$$

$$-(l^2 + 1)\pi v_0 - 2\pi \dot{w}_1 + \frac{2\pi h_0^2 l}{3R} \dot{c} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right) - \pi q (l^2 + 1) \dot{v}_0 - 2\pi q l \dot{w}_1 = 0,$$

$$\frac{2\pi h_0^2 l^2}{3R} \dot{w}_1 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right) + \frac{2\pi h_0^2 l}{3R} \dot{v}_0 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right) - \frac{4\pi R \dot{c}}{h_0^2} \Phi_2 -$$

$$- \sum_{p=0}^n \left(-2R^2 \Phi_{p+1}^v M_{p-n} + 4R \Phi_{p+2}^v M_{p-n+1} \dot{c} \right) \times \frac{C_n^p (n+1) (-1)^{n-p} q^{n-p} R^{n-p}}{2^{n-p} h_0^{n+2}} c^p = 0.$$

Our next step will be to calculate the unknown function arguments. To do this, the system of equations must be supplemented with initial conditions, which, based on the physics of the phenomenon, consist in the absence of a moment, an azimuthal displacement, and the presence of an initial imperfection:

$$c(0) = 0, \quad v_0(0) = 0, \quad w_1(0) = w_1^0 \cos l\theta, \quad (10)$$

where w_1^0 is the specified amplitude of the initial imperfection.

For further calculations, it turns out to be appropriate to express w_1 by q . Combining the second and third equations of the system, we get the expressions

$$\dot{c} = \frac{3R(l^2 - 1)}{2h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right)} (w_1 q)', \quad \dot{v}_0 = -\frac{1}{l} \dot{w}_1. \quad (11)$$

After integrating the first expression (11) under the conditions (10), we get the formula

$$c = \frac{3R(l^2 - 1)}{2h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right)} w_1 q . \quad (12)$$

Using formulas (11), (12) and excluding from the last equation of the above system v_0 and c , we arrive at a nonlinear differential equation with respect to \dot{w}_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{2h_0^2(l^2 - 1)}{3R} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right) \dot{w}_1 - \frac{6(l^2 - 1)R^2 q}{l^2 h_0^4 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right)} \Phi_2 \dot{w}_1 - \frac{6(l^2 - 1)R^2}{l^2 h_0^4 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right)} \Phi_2 w_1 - \\ & - \sum_{p=0}^n \left(-2R^2 \Phi_{p+1}^v M_{p-n} + 6R^2 \frac{(l^2 - 1)q}{h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right)} \Phi_{p+2}^v M_{p-n+1} \dot{w}_1 + \right. \\ & \left. + 6R^2 \frac{(l^2 - 1)}{h_0^2 l^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right)} \Phi_{p+2}^v M_{p-n+1} w_1 \right) \frac{C_n^p (n+1) q^n R^n (-1)^{n-p} 3^p (l^2 - 1)^p}{2^n h_0^{n+2p+2} l^{2p} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2\right)^p} w_1^p = 0. \quad (13) \end{aligned}$$

To give a quantitative idea of the nature of the change in the critical forces obtained for different values λ , we give the following example. We introduce dimensionless quantities:

$$\xi = \frac{h}{R}, \quad \gamma = \frac{w_1}{R}, \quad \eta = \frac{E_1}{\sigma_1^0}, \quad \tau = \frac{q}{E_1}, \quad \varphi_2 = \frac{3E_1}{2h_0^3} \Phi_2,$$

$$\varphi_{p+i}^v = \frac{(p+i+1)E_1(\sigma_1^0)^2}{2h_0^{p+i+1}} \Phi_{p+i}^v, \quad i = 1, 2,$$

$$\gamma = \frac{\sigma_1^0}{\sigma_2^0}, \quad \alpha = \frac{E_1}{E_2}, \quad \beta = \frac{\delta_2(\theta)}{\delta_1(\theta)} = \frac{\delta_{20}}{\delta_{10}}.$$

This de-dimensionalization β follows from the accepted form of layer eccentricity (formula (1)). Consider the stability of a three-layer ($s = 3$) eccentric ring, with the following periodic structure: $E_1 = E_3$, $\delta_1(\theta) = \delta_3(\theta)$ and $\sigma_1^0 = \sigma_3^0$.

We write equation (13) for the value of the non-linearity index $n = 2$ (in this case, the buckling occurs in the form of an "eight"):

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{1}{\gamma} \left[0,67(l^2 - 1)\xi^3 - \frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5\lambda^2)^2} \varphi_2 \tau - 0,75 \frac{l^2 - 1}{l^2(1 + 0,5\lambda^2)^2} \xi^{-2} \eta^2 \varphi_2^v \tau^3 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -3,04 \frac{(l^2 - 1)^3}{l^6 (1 + 0,5\lambda^2)^4} \xi^{-4} \eta^2 \gamma^2 \varphi_4^v \tau^3 \left. \left[\frac{l^2 - 1}{l^2 (1 + 0,5\lambda^2)^2} \varphi_2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2,25 \frac{l^2 - 1}{l^2 (1 + 0,5\lambda^2)^2} \xi^{-2} \eta^2 \varphi_2^v \tau^2 + 3,04 \frac{(l^2 - 1)^3}{l^6 (1 + 0,5\lambda^2)^4} \xi^{-4} \eta^2 \gamma^2 \varphi_4^v \tau^2 \right]^{-1}, \quad (14)
\end{aligned}$$

here

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{1 + 1,5\beta + 0,75\beta^2 + 0,125\alpha\beta^3}{(1 + 0,5\beta)^3}, \\
\varphi_2^v &= \frac{1 + 1,5\beta + 0,75\beta^2 + 0,125\alpha\beta^3 \gamma^2}{(1 + 0,5\beta)^3}, \\
\varphi_4^v &= \frac{1 + 2,5\beta + 2,5\beta^2 + 1,25\beta^3 + 0,32\beta^4 + 0,032\alpha\beta^5 \gamma^2}{(1 + 0,5\beta)^5}.
\end{aligned}$$

Similarly, nonlinear differential equations for $n = 4$ and $n = 6$ are obtained from equation (13), which are not presented here because of the cumbersome relations.

In equation (14), the transition to dimensionless differentiation was carried out according to the rule

$$\frac{d}{dq} = \frac{1}{E_1} \frac{d}{d\tau}$$

Equation (14) should be integrated under the initial condition

$$\gamma(0) = \frac{w_1^0}{R} = \gamma_0.$$

It is important to note that despite the rather cumbersome calculations due to the multilayering taking into account the complete geometric nonlinearity, the nonlinear physical relationship and the presence of eccentricity, the solution of the problem can be reduced to the solution of the Cauchy problem for a nonlinear differential equation of the first order, resolved with respect to the derivative under the additional condition characterizing the limit state of the ring

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = 0.$$

3. Numerical analysis. The above mentioned allows us to perform numerical integration of the obtained problem by the Runge-Kutta method.

With the following calculated data

$$\gamma_0 = 10^{-1}, \xi = 10^{-1}, \eta = 3 \cdot 10^2, l = 2, \alpha = 2, \beta = 4, \gamma = 0,5,$$

figures 2 show the dependences τ_{kp} on λ for $n = 2$ - a), for $n = 4$ - b), for $n = 6$ - c). Solid lines - 1 correspond to the case when σ represented by formula (7), dotted lines - 2 when σ represented by formula (8).

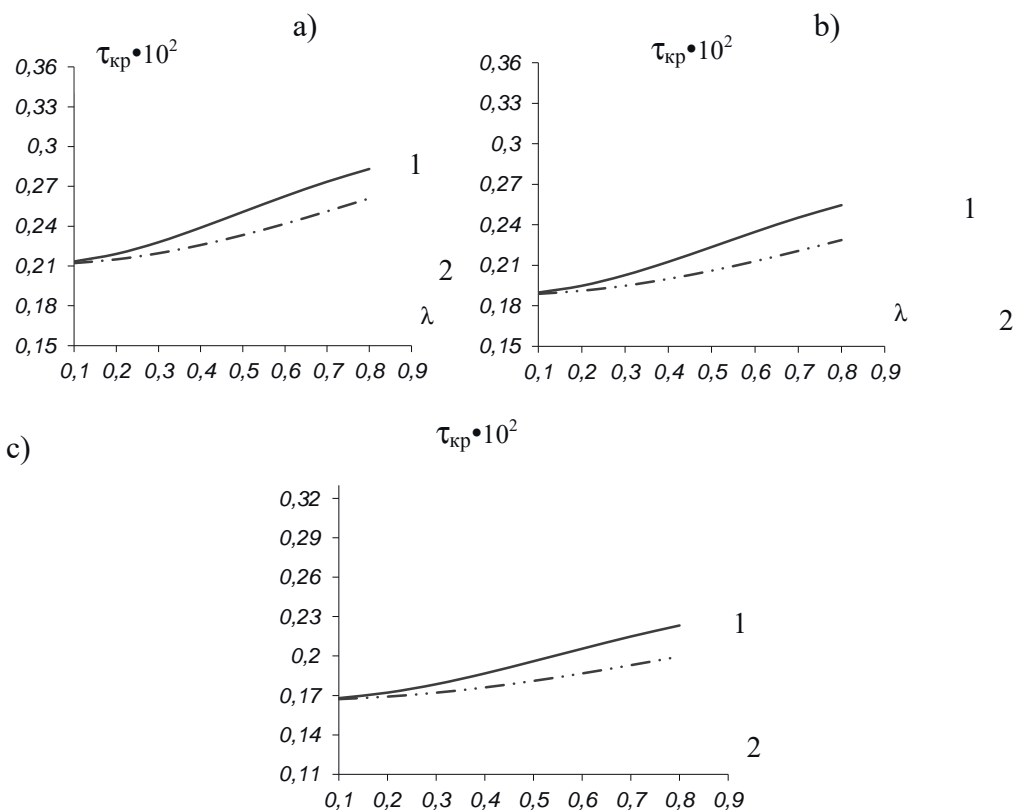


Fig. 2. Dependences of the critical buckling force τ_{kp} on the parameter λ :
a) $n = 2$, b) $n = 4$, c) $n = 6$.

4. Conclusions.

- for certain values of the different-walled parameter λ , the representation of the voltage by the dependence (8) leads to a decrease in the values of the critical force (about 10%) , and thus it is necessary to take into account the approximation (7);
- the difference in thickness of the walls significantly increases the critical buckling force (on the order of 25%);
- the values of the critical force decrease when the non-linearity index increases, but at $n = 2$ and $n = 4$ they are closer to each other, and at $n = 6$ strongly decrease.

This work was supported by the Science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan –

Grant № EIF /MQM/ Elm-Təhsil-1-2016-1(26)-71/12/1-M-28

REFERENCE

1. Volmir A.S. Stability of deformable systems. Moscow: Nauka, 1967, 484 p. (in Russian)
2. Alfutov N.A. Fundamentals of calculation for the stability of elastic systems. M.: "Mechanical Engineering", 1978, 311 p. (in Russian)
3. Fatullayeva L.F., Huseynov F.S. Numerical solution of the problem of buckling an eccentric ring / Materials of the International Conference dedicated to Akad. M.L.Rasulov's 90th anniversary. Baku, 2006, p. 170-175. (in Russian)
4. Amenzade R.Yu., Kiyasbeyli E.T., Fatullayeva L.F. Buckling of a long cylindrical shell from a nonlinear elastic material // Journal "Mechanics of Shells and plates", 2002, Nizhny Novgorod, pp. 87-93. (in Russian)
5. Amenzade R.Yu., Kiyasbeyli E.T. On the accuracy of linear stress distribution in problems of buckling multilayer rods // Docl. Azerbaijan Academy of Sciences, 2000, no. 4-6, pp. 72-77. (in Russian)
6. Amenzade R.Yu., Gurbanov R.A., Gusiev H.T. Application of the variational principle to the problem of buckling a nonlinear elastic ring inhomogeneous in thickness // Mechanics of Composite Materials, 1995, No. 2, pp. 262-268. (in Russian)

QEYRİ-XƏTTİ ELASTİKİ, EKSENTRİK HALQANIN LİMİT VƏZİYYƏTİNİN TƏYİNİ

M. F.MƏHDİYEV, L.F.FƏTULLAYEVA, N.İ.FOMİNA, L.H.XƏLİLOVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan işin məqsədi xaricdən təsir edən müntəzəm təzyiqə məruz qalmış, qeyri-xətti elastiki materialdan hazırlanmış, çoxlaylı eksentrik halqanın limit vəziyyətinin tədqiqidir. Baxılan halda qabarma zamanı böhran qüvvənin müxtəlif qalınlığı xarakterizə edən parametrdən asılılığının hesablanması əhəmiyyət kəsb edir, belə bir parametrin varlığını isə, məsələn, məmulatın hazırlanmasında qeyri-dəqiqliyin olması ilə izah etmək olar. Qoyulmuş məsələnin həlli üçün Reley-Rits üsulu vasitəsilə varyasiya hesabı prinsipindən istifadə edilmişdir.

Açar sözlər: çoxlaylı eksentrik halqa, müxtəlif qalınlıq parametri, böhran qüvvə, Reley-Rits üsulu, gərginlik, qeyri-xəttilik göstəricisi.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

М.Ф.МЕХТИЕВ, Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА, Н.И.ФОМИНА, Л.Г.ХАЛИЛОВА

РЕЗЮМЕ

Целью настоящей работы является исследование предельного состояния многослойного эксцентричного кольца, изготовленного из нелинейно-упругого материала и подверженного равномерному внешнему давлению. В этом случае весьма существенным представляется вычисление критической силы выпучивания в зависимости от параметра, характеризующего разностенность, наличие которого можно объяснить, например, неточностью изготовления изделия. Для решения поставленной задачи будем использовать принцип вариационного исчисления с методом Релея-Ритца.

Ключевые слова: многослойное эксцентрическое кольцо, параметр разностенности, критическая сила, метод Релея-Ритца, напряжение, показатель нелинейности.

УДК 539.376

**ВЫПУЧИВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ТОНКОСТЕННОЙ
ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ****Ю.СЕВДИМАЛИЕВ***Бакинский Государственный Университет*
yusifsev@mail.ru

Рассматриваются процессы, протекающие при деформировании в условиях ползучести многослойной круговой цилиндрической оболочки, имеющее отклонение от некоторой идеальной формы. Рассматривая процесс течения при заданной системе нагрузок и критическое время, соответствующая потери устойчивости, определяется из условия обращения в бесконечность скоростей деформирования. Оценивается влияние многослойности оболочки на критические значения параметров. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: ползучесть, многослойная оболочка, потеря устойчивости при ползучести, оболочечные структуры, квазистатическая неустойчивость, критическая время, математическая модель, вариационный принцип, несущая способность.

В статье [1] содержащий обзор за последнее 50 лет, приводятся исследования по потере устойчивости круглых цилиндрических оболочек, сферических оболочек, частичные цилиндрические оболочки и другие оболочки, рассматриваются в дополнение к критериям потери устойчивости при ползучести. Выпучивание подразделяется на два типа в зависимости от характера нагружения и конструктивных параметров оболочки. Один из них - потеря устойчивости при ползучести из-за квазистатической неустойчивости, при которой критическое время потери устойчивости при ползучести определяется путем отслеживания зависимости деформации ползучести от времени. Другая потеря устойчивости при ползучести из-за кинетической нестабильности, при которой критическое время можно определить, исследуя форму полной потенциальной энергии в окрестности квазистатического состояния равновесия. Бифуркационное продольное изгибание и выпучивание при ползучести относится выпучивание из-за защелкивания при деформации ползучести. Хофф N.J. и другие [2] обсуждали продольное изгибание стержня и пластины при осевом или плоском сжатии. Он сравнил два критических момента. Один из

них был получен квазистатическим методом, в котором критическое время определяется как время, когда скорость поперечного или вне плоского отклонения, принимаемого в качестве начального дефекта, становится бесконечной. В другое было получено из энергетического метода, в котором критическое время определяется как время, когда поперечная или отклонения от плоскости возникают в деформированном в осевом направлении стержне или пластине, деформированной в плоскости. Этот метод изначально был предложен Ю.Н.Работновым и С.А.Шестериковым [3]. Хофф N.J. [4] обнаружил, что кинетическая неустойчивость, судя по энергетическому методу обеспечивает гораздо более консервативное критическое время, чем квазистатическая неустойчивость, оцененная квазистатическим методом. Таким образом он пришел к выводу, что критическое время, полученное с помощью энергетического метода, бесполезно для большинства практических целей. Ямамото [5] также показал эффективность квазистатического метода по потери устойчивости при ползучести, что он может продолжать стабильно деформироваться из-за эффекта ползучести после бифуркационного выпучивания. В работах [6-8] и [9,10] рассматривались потери устойчивости при ползучести круглых цилиндрической оболочек и пологих арок при осевом сжатии и под действием распределенной по внешней поверхности нормального давления.

Теоретические и экспериментальные исследования по расчету потери устойчивости многослойной длинной круглой цилиндрической оболочки под внешним давлением для изучения возможности потери устойчивости при ползучести проводятся с целью для предсказания критического времени при высоких температурах с коэффициентов запаса прочности по нагрузке или к запаса прочности по времени по сравнению с экспериментальными данными.

Было обнаружено, что предложенная модель обеспечивает консервативные критические времена во всех случаях и достаточно точный в случае тонких оболочек [12-14].

Постановка задачи и метод решения. Соотношения ползучести для большинства конструкционных материалов являются нелинейными. Задача по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) в элементах конструкций при ползучести с учетом геометрической нелинейности, изготовленных из композитов и различных нелинейно-упругих материалов и соединенные между собой посредством полного сцепления, является математически сложной. Задача является дважды нелинейным и бывает необходимым исследования решений нелинейных краевых задач разрывными коэффициентами. Поэтому разрабатываются приближенные методы, для задач механики деформируемых сред предпочтение отдается вариационным методам при стремлении получить решение в виде формул, а также численным методам с иллюстрацией результатов в виде таб-

лиц и графиков. В предложенной работе оба метода совмещаются. Примером сложной задачи устойчивости при ползучести служит задача об устойчивости пологой арки и оболочек, нагруженные распределенным давлением, в которых обнаруживаются потери устойчивости с внезапным скачком [8], [9]. Авторами статьи [10] для гетерогенных сред в трехмерной постановке для процесса ползучести сформулирована вариационная теорема. Функционал, описывающий процесс деформации при ползучести всего многокомпонентного тела, построена модификацией смешанного вариационного принципа [11].

Пусть бесконечная многослойная круговая цилиндрическая оболочка радиуса R и толщиной $2h$ состоит из s слоев, тогда обозначая толщину через δ_k k -го слоя. Область поперечного сечения оболочки с дискретными слоями, между соседними слоями которого существуют жесткие сцепления, будем разбивать на интервалы интегрирования $[a_k = -h + \sum_{j=0}^k \delta_j, a_{k+1} = a_k + \delta_{k+1}]$, где $\delta_0=0$.

При сделанных предположениях мгновенную упругой деформации для сэндвич пакета принимаем нелинейно упругим следующего вида

$$\varepsilon^v = \frac{\sigma}{E_{k+1}} \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0} \right)^n \right\}, \quad [n = 2, 4, 6, \dots] \quad (1)$$

Зависимость (1) достаточно хорошо аппроксимируют упругое деформировании композитов, армированных композитов, алюминиевых сплавов и т.д. Здесь и далее используются общепринятые обозначения в механике сплошных сред для физических величин, так что E_{k+1} модуль упругости и σ_{k+1}^0 значение напряжений в момент возникновения деформации ползучести, в материале соответствующего слоя.

Аналитическое выражение для закона упрочнения при ползучести, в виде зависимости скорости деформации ползучести от напряжения выбирается степенной [15]

$$\dot{\rho} = B_{k+1} \sigma^m \quad (2)$$

и это аппроксимация для начальных участков дает удовлетворительные результаты. Здесь величины B_{k+1} и m постоянные материала, которые определяются из эксперимента. В формуле (2) и далее точкой над величинами обозначаем производную по времени или по любому монотонно изменяющемуся параметру, характеризующему процесс деформации.

В виду независимости НДС от продольной координаты в цилиндрической системе координат с учетом гипотезы Кирхгофа-Лява функционал приведенный в работе [10], принимает вид

$$J = R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2R^2} \sigma \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right)^2 \right\} dr d\theta - \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{\sigma}^2 \left[1 + (n+1) \left(\frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0} \right)^n \right] dr d\theta - \quad (3)$$

$$- R \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{s-1} B_{k+1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{\sigma} \sigma^m dr d\theta$$

В силу тонкостенности оболочки примем закон распределения нормального мембранного напряжения по толщине линейным

$$\sigma = -\frac{qR}{2h} + \frac{3Mr}{2h^3} \quad (4)$$

Для решения задачи вариационным методом с сочетанием приближенного метода Ритца аппроксимирующие функции для прогиба и изгибающего момента зададим в виде

$$w = a_0(t) + a(t)\cos l\theta, \quad M = b(t)\cos l\theta \quad (5)$$

В следствии закона плоских сечений

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi r \quad (6)$$

где, для нелинейных тонкостенных оболочек линейная деформация и кривизна определяются формулами

$$\varepsilon_0 = \frac{w}{R} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2, \quad \chi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

Подставив зависимости (1), (2), (4), (5), (6) и их производные по времени t в формулу (3), получаем

$$J = \frac{3}{2h^3} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \dot{w}_{,\theta\theta} \dot{M} d\theta \int_{-h}^h r^2 dr - \frac{q}{4h} \int_0^{2\pi} \dot{w}_{,\theta}^2 d\theta \int_{-h}^h dr - \frac{9R}{8h^6} \int_0^{2\pi} \dot{M}^2 d\theta \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} r^2 dr -$$

$$- \frac{9(n+1)R}{8h^6} \sum_{i=0}^n c_n^i \left(-\frac{qR}{2h} \right)^{n-i} \left(\frac{3}{2h^3} \right)^i \int_0^{2\pi} \dot{M}^2 M^i d\theta \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1} \left(\sigma_{k+1}^0 \right)^n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} r^{i+1} dr -$$

$$- \frac{3R}{2h^3} \sum_{j=0}^m c_m^j \left(-\frac{qR}{2h} \right)^{m-j} \left(\frac{3}{2h^3} \right)^j \int_0^{2\pi} \dot{M} M^j d\theta \sum_{k=0}^{s-1} B_{k+1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} r^{j+1} dr$$

После интегрирования

$$J = -\frac{c_1 l^2 \dot{a} \dot{b}}{R} - \frac{q c_2 l^2 \dot{a}^2}{2} - \frac{9 R \Phi_2 c_1 \dot{b}^2}{8 h^6} - \frac{9(n+1) R \dot{b}^2}{8 h^6} \sum_{i=0}^n C_n^i \left(-\frac{q R}{2 h}\right)^{n-i} \left(\frac{3}{2 h^3}\right)^i c_{i+1} b^i \Phi_{i+2} - \quad (8)$$

$$-\frac{3 R \dot{b}}{2 h^3} \sum_{j=0}^m C_m^j \left(-\frac{q R}{2 h}\right)^{m-j} \left(\frac{3}{2 h^3}\right)^j c_{j+1} b^j \Phi_{j+1}$$

где приняты обозначения

$$c_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2 l\theta \cdot d\theta, \quad c_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 l\theta \cdot d\theta,$$

$$c_{i+1} = \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} l\theta \cdot d\theta, \quad c_{j+1} = \int_0^{2\pi} \cos^{j+1} l\theta \cdot d\theta$$

$$\Phi_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} r^2 \cdot dr,$$

$$\Phi_{i+1} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1} (\sigma_{k+1}^0)^n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} r^{i+1} \cdot dr,$$

$$\Phi_{j+1} = \sum_{k=0}^{s-1} B_{k+1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} r^{j+1} \cdot dr.$$

Из условия стационарности функционала получается система двух дифференциальных уравнений, которое несложным математическим преобразованием приводится к одному дифференциальному уравнению, разрешенной относительно производной. Вводя безразмерные переменные и величины

$$\eta = \frac{a}{h}, \quad \tau = B_1 E_1^m t, \quad \omega = \frac{q}{E_1}, \quad \xi = \frac{R}{h}$$

$$\frac{E_1 \Phi_2}{h^3} = \varphi_2, \quad \frac{E_1^{n+1} \Phi_{i+1}}{h^{i+1}} = \varphi_{i+1}, \quad \frac{\Phi_{j+1}}{B_1 h^{j+1}} = \varphi_{j+1}$$

получим дифференциальную уравнению, связывающую безразмерную времени от безразмерного прогиба, параметром которого является безразмерная нагрузка ω .

$$\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{-c_1 l^2 + \frac{9c_2}{4} \zeta^3 \varphi_2 \omega}{\frac{3}{2^{m+1}} \zeta^{m+2} \omega^m \sum_{i=0}^n 3^j C_m^j c_{j+1} \eta^j \varphi_{j+1}} + \frac{\frac{9(n+1)}{2^{n+1}} \zeta^{n+3} \omega^{n+1} \sum_{i=0}^n 3^i C_n^i c_{i+2} \eta^i \varphi_{i+1}}{\frac{3}{2^{m+1}} \zeta^{m+2} \omega^m \sum_{i=0}^n 3^j C_m^j c_{j+1} \eta^j \varphi_{j+1}}} \quad (9)$$

Дифференциальное уравнение, с начальным условием для прогиба составит задачу Коши. Определим Начальным условием для задачи вы-

пучивания оболочки при ползучести будет значение прогиба, возникающая немедленно после приложения распределенной нормальной нагрузки, соответствующее решению нелинейно-упругой задачи. Устойчивости при ползучести имеет смысл, когда действующая нагрузка меньше критической, определяемая из решения нелинейно-упругой задачи.

Вариационное уравнение для упругой задачи. Предполагаем, что действующая равномерно распределенная по поверхности сжимающая нагрузка q по значению меньше критической эйлеровой силы q_{kr} , т.е. $q < q_{kr}$. В этом случае оболочка в результате мгновенно-упругой деформации под нагрузкой q принимает новое положение. Это положение должно быть устойчивым, в противном случае теряется устойчивость для этого элемента конструкции в пределах упругости, без возникновения деформации ползучести. Среди кинематических возможных положений оболочки неустойчивому соответствует то состояние в пределах упругости, при котором функционал

$$J = R \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2R^2} \sigma \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \right)^2 \right\} dr d\theta - \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{\sigma}^2 \left[1 + (n+1) \left(\frac{\sigma}{\sigma_{k+1}^0} \right)^n \right] dr d\theta + R \int_0^{2\pi} \dot{w} d\theta \quad (10)$$

принимает стационарное значение. Будем аппроксимировать прогиб и изгибающий момент по той же моде, что и при ползучести (5), но с амплитудами зависящие от параметра нагрузки.

$$w = a_0((q)) + a((q)) \cos \ell \theta, \quad M = b(q) \cos \ell \theta \quad (11)$$

Явлении потери устойчивости с выпучиванием оболочки при упругости происходит тогда, когда нагрузка достигает критическое значение и остаются при этом неизменным. Распределение напряжения по толщине оболочки принимаем в виде (4). Дифференцирование напряжений в пределах упругости производим по отношению монотонно изменяющейся нагрузке q , так что

$$\dot{\sigma} = -\frac{R\dot{q}}{2h} + \frac{3\dot{M}r}{2h^3} \cdot \quad \text{где} \quad \dot{q} = \frac{dq}{dq} = 1, \quad \text{и таким образом}$$

$$\dot{\sigma} = -\frac{R}{2h} + \frac{3\dot{M}r}{2h^3} \quad (12)$$

из условия стационарности функционала, соответствующее потери упругой устойчивости с выпучиванием получается следующее дифференциальное уравнение в безразмерных величинах

$$\frac{d\omega}{d\eta} = \frac{-\pi^2 + \frac{9\pi}{4} \zeta^3 \varphi_2 \omega + \frac{9(n+1)}{2^{n+2}} \zeta^{n+3} \omega^{n+1} \sum_{i=0}^n 3^i c_n^i c_{i+2} \eta^i \varphi_{i+2}}{-\frac{9\pi}{4} \zeta^3 \eta \varphi_2 + \frac{3}{2^{n+2}} \zeta^{n+3} \omega^n \sum_{i=0}^n 3^i c_n^i c_{i+1} \eta^i \varphi_{i+1} + \frac{9(n+1)}{2^{n+1}} \zeta^{n+3} \omega^n \sum_{i=0}^n 3^i c_n^i c_{i+2} \eta^i \varphi_{i+2}} \quad (13)$$

Из условия равенства числителя в ноль, получаем значения критической нагрузки.

Пример расчета конкретной задачи. Наиболее часто встречающимся на практике несовершенством круговых оболочек является ее начальная эллиптичность. Для решения конкретной задачи начальное отклонение срединной линии от окружности принимается пропорциональным косинусу двойного полярного угла ($l=2$) [15].

Предположим, что в трехслойной оболочке лицевые слои изготовлены из одного материала, с одинаковой толщиной, тогда $E_1=E_3$, $B_1=B_3$, $\delta_1=\delta_3$, $\sigma_1^0=\sigma_3^0$. Для численной реализации решения задачи с составлением таблицы и построением характерных графиков введем следующие безразмерные величины

$$\xi=R/h, \alpha=E_1/E_2, \beta=\delta_2/\delta_1, \gamma=\sigma_1^0/\sigma_3^0, \mu=B_2/B_1 \text{ и } \lambda=E_1/\sigma_1^0.$$

Для этих величин принимаем $\xi=20$, $\beta=2$, $\gamma=\sigma_1^0/\sigma_3^0$ и $\lambda=3$.

Уравнение (13) решается численно, методом Рунге-Кутты, принимая для начального безразмерного отклонения значение $\eta_0=0,1$. Решению уравнения задачи будет соответствовать число

$$\eta(0)=0,1273. \quad (14)$$

Задача Коши для уравнения (9)- (14) решается методом Рунге-Кутты для различных значений безразмерных параметров. Для значений безразмерной критической времени, соответствующее момента потери устойчивости с выпучиванием, будем иметь:

При $n=2$, $m=5$ для $\mu=2$ и $\alpha=\gamma=1,75$ критическая время будет $\tau_{kr}=3,92 \cdot 10^4$:

$n=2$, $m=5$ для $\mu=1$ и $\alpha=\gamma=1$ критическая время будет $\tau_{kr}=3,42 \cdot 10^4$:

При $n=4$, $m=5$ для $\mu=2$ и $\alpha=\gamma=1,75$ критическая время будет $\tau_{kr}=3,15 \cdot 10^3$:

$n=4$, $m=5$ для $\mu=1$ и $\alpha=\gamma=1$ критическая время будет $\tau_{kr}=2,6 \cdot 10^3$:

При $n=6$, $m=5$ для $\mu=2$ и $\alpha=\gamma=1,75$ критическая время будет $\tau_{kr}=342$:

$n=6$, $m=5$ для $\mu=1$ и $\alpha=\gamma=1$ критическая время будет $\tau_{kr}=300$.

При выбранных значениях безразмерных параметров по результатам полученных решений заключаем, что оно хорошо согласуется с результатами теоретических и экспериментальных работ [1,7,14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Noriyuki Mizayaki and Seila Hagihara, Creep buckling of shell structures. Mechanical Engineering Reviews, vol.2, №2,2015, pp.1-23.
2. Pittner, E.V. and Hoff, N.J., Creep buckling of simply supported moderately thin circular cylindrical shell. Acta Mechanica, vol.8, №1-2, 1969, pp.116-125.
3. Ю.Н.Работнов, С.А.Шестериков Устойчивость стержней и пластинок в состоянии ползучести. ПММ,1957,2, № 3.с.27-34.
4. Hoff N.J., Rules and methods of stress and stability calculations in the presence of creep, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, vol.48, №3. 1978. pp.669-675.
5. Yamamoto, Y., Consideration of a stability criterion for creep buckling, Journal of Mechanics and Physics of solids, vol.18, №2,1970, pp.165-177.
6. Ю.М. Севдмалиев Выпучивание длинных цилиндрических оболочек при ползучести,

Ученые записки МВССО Азерб.ССР Серия физико-математических наук 1978, №4. с.33-39.

7. Р.Ю.Амензаде, Э.Т. Киясбейли, Л.Ф. Фатуллаева Сплющивание разностенной длинной многослойной вязкоупругой цилиндрической оболочки Журнал Механика композитных материалов, 2011, т.47, №2, с.1-18
- 8.Э.И.Григолюк, Ю.В. Липовцев.Применение вариационного принципа в задачах устойчивости оболочек в условиях ползучести. Инженерный журнал «Механика твердого тела», 1966,№2.с.84-90.
- 9.Ю.М. Севдималиев Устойчивость нелинейной арки при ползучести, Доклады АН Азерб.ССР,1982, т. XXXVIII.с.13-17.
- 10.Р.Ю.Амензаде, Ю.Бавафа, Ю.М.Севдималиев Вариационный метод решения задачи предельного состояния многослойного жестко защемленного нелинейно-упругого стержня при ползучести. Вестник ЧГПУ им.И.Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния,2011. №1(9). с.61-70.
- 11.Sanders G. L., McComb H. G., Schlechte F.R. A variational theorem for Creep with applications to plates and columns. -NASA Report,134,1958.
- 12.Bockhold, J. and Petryna, Y.S., Creep influence on buckling resistance of reinforced concrete shells. Computers and Structures, vol.86, №7-8, 2008, pp.702-713.
- 13.Dai, H.L., Dai, T. and Zheng, H.Y., Creep buckling and post-buckling analyses for a hybrid laminated viscoelastic FGM cylindrical shell under in-plane loading. International Journal of Mechanics and Material Design, vol.9, №4, 2013, pp.309-323.
- 14.Hamed, E., Bradfort, N.A., Gilbert, R.I. and Chang, Z.T., Analytical model and experimental study of failure behavior of thin -walled shallow concrete domes, Journal of Structural Engineering, vol.137,№1.2011,pp.88-99.
- 15.Ю.Н. Работнов Ползучесть элементов конструкции М.,1966г.,752с.

PAYLANMIŞ YÜKÜN TƏSİRİNDƏN ÇOXLAYLI NAZİK QALINLIQLI ÖRTÜYÜN SÜRÜNCƏKLİK HALINDA QABARMASI

Y.SEVDİMƏLİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə başlanğıc elliptik eksenstritetli nazikdivarlı çoxlaylı dairəvi uzun silindrik örtükdən ibarət konstruksiya elementinin paylanmış yük təsirindən sürüncəklik (creep) deformasiyası prosesində qabarması məsələsi tədqiq olunur. Silindrik örtüyün qeyri-xətti elastiki materialdan hazırlandığı, deformasiyanın həndəsi qeyri-xətti olması və sürüncəklik qanununun gərginliyin qüvvət funksiyası kimi approksimasiya olunduğu hallara baxılır. Məsələnin fiziki və həndəsi qeyri-xətti münasibətlərlə ifadə olunan riyazi modeli qurulur. Həll qarışıq varyasiya prinsipinin çoxlaylı sendvic tipli örtüklər üçün qurulmuş modifikasiyası və təqribi ədədi üsulların birlikdə tətbiqi ilə həll edilir. Konkret bir məsələ üçün ədədi həllər alınır və elementin yükdaşıma qabiliyyətinin böhran zaman resursu təyin olunur.

Açar sözlər: Sürüncəklik, çoxlaylı örtük, sürüncəklik prosesində qabarma, böhran zaman müddəti, örtük konstruksiyalar, riyazi model, varyasiya prinsipi.

BUCKLING OF A MULTILAYER THIN-WALLED SHELL DURING CREEP UNDER THE ACTION OF A DISTRIBUTED LOAD

Yu.SEVDIMALIYEV

SUMMARY

The processes occurring during deformation under creep conditions of a multilayer circular cylindrical shell deviating from a certain ideal shape are considered. Considering the flow process for a given system of loads and the critical time corresponding to the loss of stability, is determined from the condition that the deformation rates go to infinity. The influence of the multilayer shell on the critical values of the parameters is estimated. An example of calculation is given.

Keywords: creep, multilayer shell, creep buckling, shell structures, quasi-static instability, critical time, mathematical model, variational principle, bearing capacity.

UOT 529.539**ÖZLÜ ELASTİKİ SIXILMAYAN MAYENİN YARIM SONSUZ ÖZLÜ ELASTİKİ, DƏYİŞƏN EN KƏSİKLİ BORUDA DÖYÜNƏN AXINI****K.R.RƏHİMOVA, A.B.ƏLİYEV*****Bakı Dövlət Universiteti******kamala.raqimova.mr@gmail.com, alialiyev.b@gmail.com***

İşdə özlü elastiki sıxılmayan mayenin yarım sonsuz özlü elastiki, en kəsiyi dəyişən olan boruda pulsasiyalı axını öyrənilir. Məsələnin həlli Şturm-Luivil tənliyi üçün sinqulyar sərhəd məsələsinə gətirilir. Sadə halda mayenin reologiyasının dalğa xarakteristikalarının təsiri öyrənilib.

Açar sözlər: dalğa, özlü maye, elastiki boru, dalğa sürəti, sönmə.

İndiki zamanda müxtəlif fiziki xarakterli mayələrin dalğa hərəkətlərinin təsviri ilə bağlı riyazi fizika məsələlərinə çox diqqət yetirilir. Bu maraq yalnız bu məsələlərin tətbiqi vacibliyinə deyil, həm də klassik riyazi fizikada analoji olmayan yeni nəzəri və riyazi tərkibinə də bağlıdır. Burada hidromexanikanın aktual məsələləri arasında deformasiya olunan borularda maye axınının tədqiqi çox vacibdir.

Bu ifadə texnika və canlı orqanizmlərdə mayenin daşınma sistemində geniş yayılması ilə təsdiqlənir (boru kəməri nəqliyyatı, hemodinamika). Belə məsələləri həll edərkən, borunun boşluğunda onun dinamikasının üzərinə hərəkət edən mayenin təsirini nəzərə alaraq, borunun hərəkət tənliyi yazılır [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8]. Bu tədqiqatların kökləri L.Eyler, Gromeko, Y.Jukovskinin əsərlərində qoyulub. Bununla yanaşı, mayenin özlü elastik xüsusiyyətləri və boru materialının daralması kimi bir sıra çox vacib amillər kifayət qədər tədqiq olunmayıb. Birözlülük xətti tənliklərə əsaslanaraq, elastik boru içərisində özlü elastik mayenin pulsasiyalı axınının məsələsi üçün daralmanın təsiri nəzərə alınaraq analitik həll olunmuşdur. Burada deformasiya olunan boruya daxil olan mayenin dalğa axını nəzərdən keçirilir. İstifadə olunan sistemin riyazi modeli, sıxılmayan özlü elastik mayenin hərəkətinin tənliyi ilə kəsilməzlik tənliyi və en kəsiyi dəyişən izotrop xətti özlü elastik boru üçün dinamika tənliyi ilə təsvir olunur. Məsələnin həlli Şturm-Luivil tənliyi üçün sinqulyar məsələsinə gətirilir.

1. Məsələnin qoyuluşu

Tutaq ki, $R=R(x)$ yarım sonsuz en kəsiyi dəyişən olan borudur və h - qalınlığıdır, burada $R(x)$ monoton azalan $\forall x \in [0, \infty)$ funksiyadır, x isə uzununa olan koordinatdır. Birölcülü hidroelastiklik tənliklərinin sistemi kəsilməzlik tənliklərindən [1,4]

$$\frac{\partial}{\partial x}(Su) + L \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

impuls tənliyi

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(-p + \sigma) \quad (1.2)$$

və xətti özlü elastiklik üçün olan borunun hərəkət tənliyindən ibarətdir

$$p = \frac{n}{R^2(x)} E^v w = \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

(1.3) tənliyini yazarkən, boru nazik divarlı olub və ətraf mühitə sərt bərkidilmişdir. Nəticədə boru ox boyunca hərəkət edə bilmir. İdeal və özlü Nyuton mayesinin hidrodinamikasının klassik təsvirləri uzun makromolekulyar birləşmələri olan butov mühit axınıni təsvir edərkən qəbul edilməzdir. Bu fakt bir çox texnoloji proseslər üçün birinci dərəcəli əhəmiyyətə malikdir ki, kolloid məhulları, suspenziyalar, emulsiyalar və s. bura daxildir. Bunun üçün, yuxarıda göstərilən tənliklərin əlaqələndirilməsi üçün, mayenin reoloji münasibətlərini yazırıq və onu xətti özlü elastiki qəbul edirik.

$$\prod_{j=1}^r \left(1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \sigma = 2\eta \prod_{j=1}^s \left(1 + \theta_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot e \quad (1.4)$$

(1.1)-(1.4) tənliklərdə $u(x,t)$ mayenin axın sürəti, $w(x,t)$ - borunun divarlarının radial yerdəyişməsi, $p(x,t)$ hidrodinamik təzyiq, $\sigma(x,t)$ - gərginlik, ρ və ρ_* - maye və borunun materialının sıxlığı, $e(x,t)$ - deformasiyanın sürəti, $S = \pi R^2$ - en kəsin sahəsi, $L = 2\pi R(x)$ - borunun çevrəsinin uzunluğu, η - mayenin dinamik özlülük əmsalıdır. λ_j və θ_j relaksasiya və retardasiyanı xarakterizə edir. (1.3)-də E^v - irsi tipli operatorudur[5].

$$E^v = E(1 - \Gamma^*), \quad \Gamma^* w(x,t) = \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w(x, \tau) d\tau$$

burada E - elastiklik moduludur, Γ^* - relaksasiya operatorudur, $\Gamma(t - \tau)$ - relaksasiyanın fərq nüvəsidir. (1.3) açıq formada belə yazılır

$$p = \frac{h}{R^2(x)} E \left\{ w(x,t) - \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w(x, \tau) d\tau \right\} \quad (1.5)$$

(1.4)-də $e = \partial u / \partial x$ bərabərliyini nəzərə alsaq, o belə yazılacaq

$$\prod_{j=1}^r \left(1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \sigma = 2\eta \prod_{j=1}^s \left(1 + \theta_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.6)$$

$R(x)$ funksiyası $R(x) = R_\infty g(x)$ kimi yazılır, funksiya $g(x)$ ikinci tərtib diferensiallandır. Sonsuzluqda boru daimi R_∞ en kəsiyinə malikdir.

Buradan alırıq ki,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 \quad (1.7)$$

Eyni zamanda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g''(x) = 0, \quad (1.8)$$

ştrixlər x koordinatına görə diferensiallanmanı bildirir. Misal üçün bu funksiyanı aşağıdakı kimi göstərmək olar

$$g(x) = 1 + e^{-\beta x} \quad (\beta > 0), \quad (1.9)$$

hansı ki borunun uzunluğuna görə konus formasında daraldığını göstərir. O zaman (1.5) və (1.6) nəzərə alaraq növbəti qapalı tənliklər sistemini alırıq:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{g'(x)}{g(x)} u + \frac{2}{R_\infty g(x)} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1.11)$$

$$p = \frac{h}{R_\infty^2 g'(x)} E \left(w(x, t) - \int_{-\infty}^t \Gamma(t - \tau) w(x, \tau) d\tau \right) \quad (1.12)$$

$$\prod_{j=1}^r \left(\sigma + \lambda_j \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) = 2\eta \prod_{j=1}^s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \theta_j \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \quad (1.13)$$

Qeyd edək ki, dalğa proseslərində hidroelastiki tənliklərin xəttiləşməsi $|u \cdot c^{-1}| \ll 1$ bərabərsizliyin olduğu müddətcə etibarlıdır.

$$\left| \frac{u}{c} \right| \ll 1,$$

c -dalğanın kompleks yayılma sürətidir (bütün zamanlar üçün). Kinematik keçirməməzlik şərtindən özlü elastiklik nəzəriyyəsinin tənliklərinin xəttiləşməsi alınır.

2. Sürət amplitudası üçün diferensial tənliyin çıxarışı

(1.10)-(1.13) xüsusi törəmələr ilə olan tənliklər sistemini adi diferensial tənliklər sisteminin həllinə gətirək.

Harmonik analiz dalğa proseslərinə xas olan mürəkkəb impulsları təsvir etmək üçün istifadə olunur, yəni mürəkkəb formada olan impulslar Furye sırası əmələ gətirən sinusoidal komponentlərə ayrılırlar. Sistemin xəttiləşmə və bircinsliyi sayəsində hər bir harmonikanın keçməsi izlənilir və hər hansı bir nöqtədə impulsun formasını müəyyən etmək üçün verilmiş koordinata uyğun

komponentlər cəmlənir. Beləliklə, riyaziyyatın əhəmiyyəti sırf sinusoidal rəqslərin öyrənilməsidir. Yuxarıda qeyd olunan bütün axtarılan funksiyaları müvəqqəti $\exp(i\omega t)$ vuruğuna proporsional olaraq təsvir etməyə imkan verir, burada ω – verilmiş həqiqi bucaq tezliyidir, i – xəyali ədəddir. Buna görə, qayıdan dalğalar üçün yazaq:

$$\begin{aligned} u &= u_1(x) \exp(i\omega t), \\ w &= w_1(x) \exp(i\omega t), \\ p &= p_1(x) \exp(i\omega t), \\ \sigma &= \sigma_1(x) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada u_1, w_1, p_1, σ_1 - koordinatların kompleks funksiyalarıdır. Əvvəlcə (1.12) tənliyini yazaq. (2.1)-də 2-ci və 3-cü düsturlarını (1.12)-də nəzərə alsaq (2.2)-ni alırıq

$$p_1 = \exp(i\omega t) - \frac{h}{R_\infty^2 g(x)} E \left\{ w_1 \exp(i\omega t) - w_1 \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \right\} \quad (2.2)$$

Burada $t - \tau = \theta$ qəbul edərək və bir sıra dəyişiklərdən sonra (2.2)-ni aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$p_1 = w_1 h \left\{ \frac{E}{R_\infty^2 g^2(x)} (1 - \alpha) - \rho_* \omega^2 \right\}$$

burada,

$$\alpha = \int_0^\infty \Gamma(\theta) e^{-i\omega \theta} d\theta \quad (2.3)$$

Mümkün relaksasiya nüvələrinə əsasən, düstür ilə müəyyən edilən kompleks dəyər α analitik və ya cəbri olaraq müəyyən edilə bilər. Yuxarıdakı kimi (1.10), (1.11) və (1.13) tənliklərində dəyişiklərdən sonra tapırıq ki:

$$u_1' + 2 \frac{g'(x)}{g(x)} u_1 + 2i \frac{\omega}{R_\infty g(x)} w_1 = 0, \quad i\omega \rho u_1 = -p_1' + \sigma_1'', \quad (2.4)$$

$$p_1 = k(x) w_1, \quad \sigma_1 = 2\eta \frac{b}{a} u_1', \quad (2.7)$$

və burada

$$a = \prod_{j=1}^r (1 + i\lambda_j \omega), \quad b = \prod_{j=1}^s (1 + i\theta_j \omega), \quad k(x) = h \left\{ \frac{E}{R_\infty^2 g^2(x)} (1 - \alpha) - \rho_* \omega^2 \right\} \quad (2.8)$$

Baxılan (2.4)-(2.7) sistemləri nəzərə alındıqda $u_1(x)$ funksiyasını təyin etmək və uyğun tənlikləri almaq mümkündür. Əvvəlcə x -a görə (2.6) və (2.7) tənliklərini diferensiallayaq. Aldığımızı (2.5)-də nəzərə alaraq yazırıq ki:

$$2\eta \frac{b}{a} u_1'' - k' w_1 - k w_1' - i\omega \rho u_1 = 0. \quad (2.10)$$

Görünür ki, (2.4)-dən (2.11) alınacaq

$$w_1 = -\frac{1}{Q_2(x)}u_1' - \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}u_1. \quad (2.11)$$

Burada $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ funksiyaları bunlardır

$$Q_1(x) = 2\frac{g'(x)}{g(x)}, \quad Q_2(x) = 2i\frac{\omega}{R_\infty g(x)}.$$

İndi isə (2.11)-dən w_1' -i tapmaq olar və onu (2.10)-da yazaraq u_1 funksiyasına nisbətən tənlik almaq olar. Və nəticə olaraq aldıq ki,

$$G_1(x)u_1'' + G_2(x)u_1' + G_3(x)u_1 = 0, \quad (2.12)$$

burada,

$$G_1(x) = 2\eta\frac{b}{a} - i\frac{R_\infty}{2\omega}k(x)g(x), \quad (2.13)$$

$$G_2(x) = -\frac{iR_\infty}{2\omega}\{(gk)' + kg'\}, \quad (2.14)$$

$$G_3(x) = -i\left\{\frac{R_\infty}{2\omega}(kg') + \omega\rho\right\}. \quad (2.15)$$

3. Məsələnin həllini Şturm-Luivil tənliyi üçün sinqulyar sərhəd məsələsinə gətirilməsi

Keçək (2.12) tənliyin həllinin qurulmasına. Bunun üçün Luivil əvəzindən istifadə edək

$$y(x) = u_1 \exp\frac{1}{2}\int\frac{G_2(x)}{G_1(x)}dx \equiv u_1(x)\chi(x), \quad (3.1)$$

Buna görə də (2.12) bu cür yazılacaq (dalğa tənliyinin azaldılma forması)

$$y'' + I(x)y = 0 \quad (3.2)$$

$I(x)$ invariantı bu düstür ilə tapılır:

$$I(x) = \frac{G_3}{G_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{G_2}{G_1}\right)' \quad (3.3)$$

(1.7) və (1.8)-ə əsaslanaraq aşağıdakı bərabərliyi alırıq

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = h\left\{\frac{E}{R_\infty^2}(1 - \alpha) - \rho_*\omega^2\right\}.$$

Buradan aydındır ki,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G_1(x) = 2\eta\frac{b}{a} - i\frac{R_\infty h}{2\omega}\left\{\frac{E}{R_\infty^2}(1 - \alpha) - \rho_*\omega^2\right\},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G_2(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G_3(x) = -i\omega\rho.$$

O zaman, yazı bilirik ki,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = -\frac{i\omega\rho}{2\eta\frac{b}{a} - i\frac{R_\infty h}{2\omega} \left\{ \frac{E}{R_\infty^2} (1-\alpha) - \rho_* \omega^2 \right\}} = \delta^2 \quad (3.4)$$

(3.4) dispersiya tənliyini həqiqi və xəyali hissələrə bölərək aşağıdakını alırıq:

$$\delta^2 = \mu_0 - i\mu_1. \quad (3.5)$$

(3.5) qısdılmış tənlikdə olan qeydlər bunlardır:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{\omega\rho m_3}{4\eta^2 m_1^2 + m_3^2}, \\ \mu_1 &= 2\eta \frac{\omega\rho m_1}{4\eta^2 m_1^2 + m_3^2}, \\ m_1 &= \operatorname{Re} \frac{b}{a}, \\ m_2 &= \operatorname{Im} \frac{b}{a}, \\ m_3 &= -2\eta m_2 + \frac{R_\infty h}{2\omega} \left\{ \frac{E}{R_\infty^2} (1-\alpha) - \rho_* \omega^2 \right\}. \end{aligned}$$

Buradan isə kompleks ədədlərdən kvadrat kökü çıxartmaq qaydası ilə δ alırıq

$$\delta = \pm \left\{ \sqrt{\frac{\psi + \mu_0}{2}} - i \sqrt{\frac{\psi - \mu_0}{2}} \right\}, \quad \psi = \sqrt{\mu_0^2 + \mu_1^2}$$

Daha sonra isə $\operatorname{Im} \delta < 0$ olan kökü istifadə ediləcək. Aydındır ki,

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 - i\delta_1, \\ \delta_0 &= \sqrt{\frac{\psi + \mu_0}{2}}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{\psi - \mu_0}{2}}. \end{aligned}$$

Nəzərə alsaq ki

$$q(x) = 1 - \frac{I(x)}{\delta^2} \quad (3.6)$$

(3.2)-dən məsələnin diferensial tənliyini alırıq:

$$y'' + \delta^2 y = \delta^2 q(x)y. \quad (3.7)$$

Kompleks $q(x)$ potensial funksiyasına inteqrallanma şərti tətbiq olunur [1]

$$\int_0^\infty |q(x)| dx < +\infty. \quad (3.8)$$

(3.6) düsturuna əsasən alınan funksiya $q(x)$ (1.9) ilə birlikdə (3.8) şərtini təmin edir.

Daha sonra həllin qurulması üçün (3.6) tənliyinə aşağıdakı sərhəd şərtlərini

əlavə edək

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

y_0 -ın hesablanması sistemin fəaliyyətindən asılıdır (borunun en kəsiyində olan fərqli sərhəd şərtləri). (3.9) şərti axtarılan şərtin məhdudluğunu göstərir. Beləliklə, alınan hidroelastiklik məsələsi (3.7), (3.9), (3.10) Şturm-Luivil sinqulyar sərhəd məsələsinin həllinə gətirildi.

4.Ekvivalent inteqral tənliyinin çıxarışı və onun həlli

Şturm-Luivil sərhəd məsələsinin həllini inteqral tənliyin həllinə gətirək. Nəzərə alaq ki, bircins tənliyin

$$y'' + \delta^2 y = 0 \quad (4.1)$$

aşağıdakı fundamental həllər sistemi vardır

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-i\delta x}, \\ y_2 &= e^{i\delta x}. \end{aligned}$$

(4.1)-ə sağ tərəfi $\delta^2 q(x)y$ kimi məlum olan bircins olmayan tənlik kimi baxılır, sərbəst daimi ədədlər üçün variasiya metodunu istifadə edərək, (3.7), (3.9), (3.10) məsələnin həllini ekvivalent inteqral tənliyinə salırıq

$$y(x, -\delta) = Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^\infty \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta, \quad (4.2)$$

o müsbət x oxu istiqamətində qayıdan dalğanı təsvir edir. C - inteqral sabitidir.

(4.2) tənliyin bir tək $y(x, -\delta)$ həlli var və o, həmçinin sonsuzluqda sərhəd şərtini təmin edərək (3.7) tənliyində həllidir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, -\delta) = 0 \quad (4.3)$$

(4.2) tənliyi Volter tipli tənlikdir və onu ardıcıl yaxınlaşmalar metodu ilə həll etmək olar.

$$y_0(x, -\delta) = C \exp(-i\delta x) \quad (4.4)$$

$$y_{n+1}(x, -\delta) = Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^\infty \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y_n(\eta, -\delta) d\eta$$

$\text{Im } \delta < 0$ olduğuna görə

$$|y_0(x, -\delta)| \leq |C| \exp(\text{Im } \delta x).$$

İnduksiya metodu ilə

$$|y_n(x, -\delta) - y_{n-1}(x, -\delta)| \leq |C| e^{(\text{Im } \delta)x} \frac{B_\delta^n(x)}{n!}, \quad (4.5)$$

$$B_\delta(x) = \left| \delta \int_x^\infty q(\eta) d\eta \right|.$$

O zaman

$$B_\delta(x) = \left| \delta \int_x^\infty q(\eta) d\eta \right| \leq \left| \delta \int_0^\infty q(x) dx \right| = B_\delta(0) < +\infty$$

bərabərsizliyindən alırıq

$$\left| y_n(x, -\delta) - y_{n-1}(x, -\delta) \right| \leq |C| \frac{B_\delta^n(0)}{n!}$$

Fikirimizi tamamlamaq üçün

$$\left| \sin \delta(\eta - x) \right| \leq \exp[-Jm\delta(\tau - x)] \quad (\tau \geq x)$$

bərabərsizliyini götürürük, $n=l$ olanda yazırıq ki

$$\begin{aligned} \left| y_1(x, -\delta) - y_0(x, -\delta) \right| &\leq |C| \left| \delta \int_x^\infty e^{-Im\delta(\eta-x)} |q(\eta)| e^{(Im\delta)\eta} d\eta \right| = \\ &= |C| \left| \delta \right| e^{(Im\delta)x} \int_x^\infty |q(\eta)| d\eta = |C| e^{(Im\delta)x} B_\delta(x) \end{aligned}$$

Tutaq ki, (4.5) $n=m$ olanda da düzdür. Onun düzgünlüyünü $n=m+1$ olanda isbat edək. Onda

$$\begin{aligned} \left| y_{m+1}(x, -\delta) - y_m(x, -\delta) \right| &\leq \left| \delta \int_x^\infty \sin \delta(\tau - x) |y_m(\eta, -\delta) - y_{m-1}(\eta, -\delta)| |q(\eta)| d\eta \right| \leq \\ &\leq \frac{|C|}{m!} e^{(Im\delta)x} \int_x^\infty B_\delta^m(\eta) |\delta| |q(\eta)| d\eta = \frac{|C|}{m!} e^{(Im\delta)x} B_\delta^m(\eta) dB_\delta(\eta) = |C| e^{(Im\delta)x} \frac{B_\delta^{m+1}(x)}{(m+1)!} \end{aligned}$$

Nəzərə alsaq ki,

$$\left| y_0(x, -\delta) \right| \leq |C| \exp(Im\delta)x \leq |C|,$$

(4.5) ilə nəticə olaraq tapırıq ki,

$$y_0(x, -\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{y_n(x, -\delta) - y_{n-1}(x, -\delta)\} \quad (4.5)$$

sırası yaxınlaşan müsbət saylı sıra ilə $[0, +\infty)$ intervalda üstnlüyü təşkil edir

$$\left| C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_\delta^n(0)}{n!} \right|.$$

Veyerştrass əsasında $x \in [0, +\infty)$ üzrə bərabər yaxınlaşır. Buradan aydındır ki, onun $y(x, -\delta)$ cəmi (4.2) tənliyinin həllidir. (4.6) sırasının $S_n(x)$ cəmi üçün yazırıq ki,

$$S_n(x) = y_0(x, -\delta) + \sum_{k=1}^n \{y_k(x, -\delta) - y_{k-1}(x, -\delta)\} = y_n(x, -\delta),$$

Onda,

$$y(x, -\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x, -\delta).$$

(4.4)-də $n \rightarrow \infty$ olanda limit həddinə keçəndə, alırıq ki,

$$y(x, -\delta) = Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta \quad (4.7)$$

Beləliklə, $y(x, -\delta)$ funksiyası (4.2) tənliyinin həllidir. Yuxarıdakı hesablamalar, ancaq $y_n(x, -\delta)$ yaxınlaşmasında düzgündür. Bundan başqa

$$\begin{aligned} |y(x, -\delta)| &\leq |y_0(x, -\delta)| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x, -\delta) - y_{n-1}(x, -\delta)| \leq \\ &\leq |C| \exp(\operatorname{Im} \delta)x + |C| \exp(\operatorname{Im} \delta)x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{\delta}^n(x)}{n!} \leq \\ &\leq |C| \exp(\operatorname{Im} \delta)x + |C| \exp(\operatorname{Im} \delta)x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{\delta}^n(0)}{n!} = \\ &= |C| \left\{ \exp(\operatorname{Im} \delta)x + \exp[\operatorname{Im}(\delta)x + B_{\delta}(0)] \right\} \end{aligned}$$

bərabərsizliyindən alırıq ki,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, -\delta) = 0$$

Nəzərə alsaq ki, (4.7) bərabərliyi doğrudur, onda inteqral işarəsi ilə differensiallana bilər. Buradan alırıq ki,

$$y'(x, -\delta) = -i\delta Ce^{-i\delta x} - \delta^2 \int_x^{\infty} \cos \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta \quad (4.8)$$

Analoji olaraq (4.8)-də differensiallayaraq alırıq:

$$y''(x, -\delta) = -\delta^2 Ce^{-i\delta x} - \delta^3 \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta + \delta^2 q(x) y(x, -\delta)$$

(4.7)-ni nəzərə alaraq

$$y''(x, -\delta) = \delta^2 q(x) y(x, -\delta) - \delta^2 \left\{ Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\eta, -\delta) d\eta \right\} =$$

$$= \delta^2 q(x) y(x, -\delta) - \delta^2 y(x, -\delta)$$

və ya

$$y''(x, -\delta) + \delta^2 y(x, -\delta) = \delta^2 q(x) y(x, -\delta),$$

Yəni $y(x, -\delta)$ funksiyası (3.7) tənliyinin həllidir.

C- ədədini tapmaq üçün onu elə seçmək lazımdır ki, o (3.9) sərhəd şərtlərini təmin etsin. Buna görə də (4.2) tənliyi üçün aşağıdakı inteqral tənliyi yazmaq

$$f(x, -\delta) = e^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) y(\tau, -\delta) d\eta \quad (4.9)$$

$f(x, -\delta)$ -ni onun həlli kimi qeyd edirik və sonar C -ni tapırıq:

$$C = \frac{y_0}{f(0, -\delta)} \quad (4.10)$$

funksiya

$$y(x, -\delta) = y_0 \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)}$$

(3.7), (3.9), (3.10) Şturm-Luivil sərhəd məsələsinin həllidir.

5. Analitik həllin qurulması

Ardıcıl yaxınlaşmalar metodu əsasında (4.9) tənliyinin həlli aşağıdakı kimi yazılır

$$f(x, -\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n f_n(x, -\delta), \quad (5.1)$$

burada,

$$f_0(x, -\delta) = e^{-i\delta x} \quad (5.2)$$

$$f_n(x, -\delta) = \int_x^{\infty} \sin \delta(\eta - x) q(\eta) f_{n-1}(\eta, -\delta) d\eta \quad (n=1, 2, \dots)$$

(2.4)-(2.7) düsturları ilə cari koordinatlardan u , w , p , σ funsiyalarını tapırıq. Nəzərə alaq ki,

$$F(x) = \frac{1}{\chi(x)} \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)}$$

onda,

$$u = y_0 F(x) \exp(i\omega t) \quad (5.3)$$

$$w = y_0 \frac{iR_{\infty}}{\omega} \left\{ \frac{1}{2} g(x) F'(x) + g'(x) F(x) \right\} \exp(i\omega t) \quad (5.4)$$

$$p = y_0 k(x) \frac{iR_{\infty}}{\omega} \left\{ \frac{1}{2} g(x) F'(x) + g'(x) F(x) \right\} \exp(i\omega t) \quad (5.5)$$

$$\sigma = 2y_0 \eta \frac{b}{a} F'(x) \exp(i\omega t). \quad (5.6)$$

Borunun en kəsiyində sərhəd şərti kimi maye sürətinin, yerdəyişməsini, təzyiqini və özlü elastik gərginliyini yazmaq üçün pulsasiya edən təzyiqli təyin edək

$$p(0, t) = p_0 \exp(i\omega t), \quad (5.7)$$

p_0 - verilmiş empirik vahiddir. (5.7) və (5.5) müqayisə etsək,

$$y_0 = p_0 \frac{\omega}{iR_{\infty}k(0) \left\{ \frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0) \right\}},$$

və (5.3)-(5.6) düsturlarından alarıq:

$$u(x,t) = -p_0 \frac{i\omega}{R_{\infty}k(0)} \frac{F(x)}{\frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0)} \exp(i\omega t),$$

$$w(x,t) = \frac{p_0}{k(0)} \frac{\frac{1}{2} g(x)F'(x) + g'(x)F(x)}{\frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0)} \exp(i\omega t), \quad (5.8)$$

$$p(x,t) = p_0 \frac{k(x)}{k(0)} \frac{\frac{1}{2} g(x)F'(x) + g'(x)F(x)}{\frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0)} \exp(i\omega t),$$

$$\sigma(x,t) = -2ip_0\eta \frac{b}{a} \frac{\omega}{R_{\infty}k(0)} \frac{F'(x)}{\frac{1}{2} g(0)F'(0) + g'(0)F(0)} \exp(i\omega t).$$

Analoji olaraq borunun en kəsiyində sərhəd şərti kimi pulyasiya edən maye sərfi verilib

$$Q = Q_0 \exp(i\omega t),$$

burada

$$Q(x,t) = S(x)u(x,t)$$

onda,

$$y_0 = \frac{Q_0}{\pi R_{\infty}^2 g(0)} \frac{1}{F(0)}$$

Buradan isə

$$u(x,t) = \frac{Q_0}{\pi R_{\infty}^2 g(0)} \frac{F(x)}{F(0)} \exp(i\omega t),$$

$$w(x,t) = \frac{iQ_0}{\pi R_{\infty} \omega g^2(0)F(0)} \left\{ \frac{1}{2} g(x)F'(x) + g'(x)F(x) \right\} \exp(i\omega t) \quad (5.9)$$

$$p(x,t) = iQ_0 \frac{k(x)}{\pi R_{\infty} \omega g^2(0)F(0)} \left\{ \frac{1}{2} g(x)F'(x) + g'(x)F(x) \right\} \exp(i\omega t),$$

$$\sigma(x, t) = 2Q_0 \frac{\eta}{\pi R_\infty^2 g^2(0)} \frac{b F(x)}{a F(0)} \exp(i\omega t).$$

(5.8) və (5.9) düstürləri həqiqi hissələri təsvir edirik və bizim missal həll edilmiş hesab olunur.

6. Ədədi misal

Aşağıdakı nümunəyə baxaq. Burada $\alpha = 0$, $R = R_\infty = R$, $g(x) = 1$ olduğuna görə (2.13)-(2.15) düstürlərinə əsasən, yazırıq ki,

$$G_1 = 2\eta \frac{b}{a} - i \frac{R}{2\omega} k, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = -i\omega\rho,$$

Həmçinin

$$k = h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\},$$

$$\chi(x) = 1, \quad q(x) = 0.$$

İndi isə $f(0, -\delta) = 1$ olduğuna görə, $f(x, -\delta)$, $f'(x, -\delta)$ və $F(x)$ funksiyalar belə yazıla bilərlər

$$f(x, -\delta) = e^{-i\delta x},$$

$$f'(x, -\delta) = -i\delta e^{-i\delta x},$$

$$F(x) = f(x, -\delta) = e^{-i\delta x}.$$

Beləliklə, məsələnin həlli asanlaşır və (5.8) sayəsində bu formada yazılır

$$u(x, t) = 2p_0 \frac{\omega}{\delta} \frac{1}{Rh \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$w(x, t) = p_0 \frac{1}{h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$p(x, t) = p_0 \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$\sigma(x, t) = 4p_0 \eta \frac{b}{a} \frac{i\omega}{Rh \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \exp[i(\omega t - \delta x)], \quad c_n = \frac{\omega}{\operatorname{Re} \delta_n},$$

və

$$u(x, t) = \frac{Q_0}{\pi R^2} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$w(x, t) = \frac{Q_0}{2\pi R} \frac{\delta}{\omega} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$p(x,t) = Q_0 \frac{h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}}{2\pi R} \frac{\delta}{\omega} \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$\sigma(x,t) = -2iQ_0 \frac{\eta}{2\pi R^2} \delta \frac{b}{a} \exp[i(\omega t - \delta x)].$$

Burada axtarılan funsiyaların amplitudları üçün Eylər düsturuna əsasən, yazı bilərək ki,

$$|u| = \frac{2\rho_0\omega}{Rh \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \frac{1}{\sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2}}, \quad |w| = \frac{p_0}{h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}}, \quad (6.1)$$

$$|p| = p_0, \quad |\sigma| = 4p_0\eta \frac{\omega}{Rh \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}} \sqrt{m_1^2 + m_2^2},$$

$$|u| = \frac{Q_0}{\pi R^2}, \quad |w| = \frac{Q_0}{2\pi R\omega} \sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2}, \quad (6.2)$$

$$|p| = \frac{Q_0 h \left\{ \frac{E}{R^2} - \rho_* \omega^2 \right\}}{2\pi R\omega} \sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2},$$

$$|\sigma| = 2Q_0 \frac{\eta}{\pi R^2} \sqrt{(\delta_1 m_1 - \delta_0 m_2)^2 + (\delta_0 m_1 + \delta_1 m_2)^2}.$$

Relaksasiya olan zamandan asılı olaraq, yuxarıdakı düstürləri də axtarılan funsiyaların hesablanmasında, dalğanın sürəti $c = \omega / \delta_0$ və δ_1 sönmələrinin tapılması üçün istifadə etmək olar.

Birinci hal $\psi = s + 1$. ($\psi = 1, s = 0$) $a = 1 + i\lambda\omega$, $b = 1$ mühitli modellər üçün, burada λ - relaksasiyanın gərginlik zamanıdır. Burada m_1 və m_2

$$m_1 = \frac{1}{1 + \lambda^2 \omega^2}, \quad m_2 = -\frac{\lambda\omega}{1 + \lambda^2 \omega^2}.$$

İkinci hal $\psi = s = 1$. Burada isə $a = 1 + i\lambda\omega$, $b = 1 + i\theta\omega$, və yuxarıdakılar bunlarla əvəz olunur

$$m_1 = \frac{1 + \lambda^2 \omega^2 \xi}{1 + \lambda^2 \omega^2}, \quad m_2 = \frac{\lambda\omega}{1 + \lambda^2 \omega^2} (\xi - 1),$$

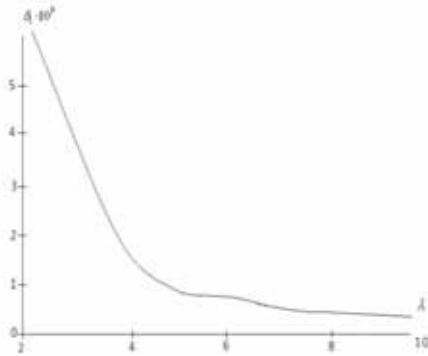
burada $\xi = \theta / \lambda$, θ - retardasiyanın zamanıdır. $\psi = s = 0$ olduqda isə özlü Nyuton mayesinin modelini əldə edirik.

Nəzərdən keçirilmiş mayelərin qeyri-Nyuton xüsusiyyətlərinin təyini üçün eksperiment aparaq, onların asılılıqlarını göstərək. Aşağıdakı parametrlər verilib:

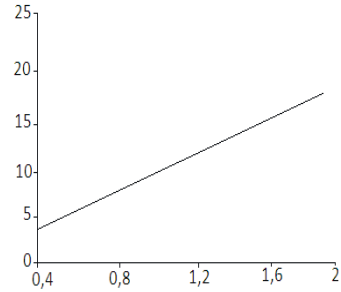
$$E = 4 \cdot 10^6 \text{ dN} / \text{sm}^2, \quad \rho = 1 \text{ q} / \text{sm}^3, \quad \rho_* = 1 \text{ q} / \text{sm}^3, \quad R = 1,2 \text{ sm}, \quad h = 0,2 \text{ sm},$$

$Q_0 = 120 \text{ sm}^3 / \text{san}$, $\omega = 2\pi \text{ san}^{-1}$, $x = 10 \text{ sm}$, $\eta = 5q / \text{sm} \cdot \text{san}$, $\eta = 14$
 Hesablamalar göstərir ki, qəbul edilmiş modelin hər iki variantında dalğa sürətinin yayılması, demək olar ki, λ və ξ asılı deyil, və $c = 577 \text{ sm/san}$ –dir.

1 və 2 şəkillərdə sönmə əmsallarının asılılıq qrafikləri verilib.

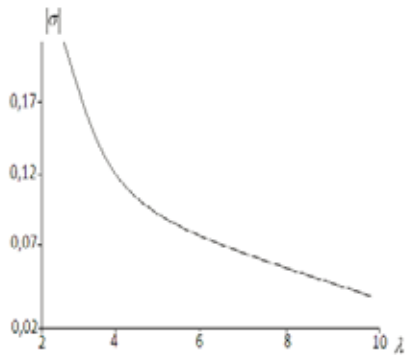


Şəkl. 1. Sönmə əmsalının λ – dan asılılığı.

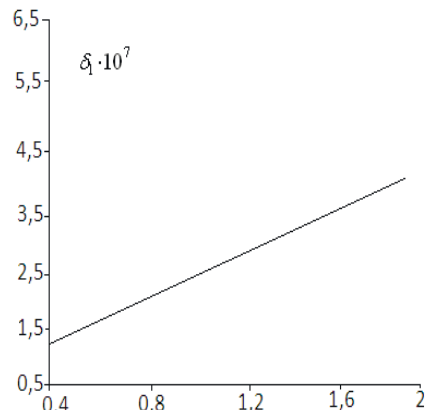


Şəkl. 2. Sönmə əmsalının ξ – dan asılılığı .

3 və 4 şəkillərdə özlü gərginlik amplitudası və λ, ξ arasında sistemin 1-ci və 2-ci funksional rejimində olan asılılıq verilib.



Şəkl. 3. Özlü gərginlik amplitudasının λ –dan asılılığı



Şəkl. 4. Özlü gərginlik amplitudasının ξ –dan asılılığı, ($\lambda = 5$).

Müqayisə üçün $m_1 = 1, m_2 = 0$ olanda rəqəmli nümunələr gətirək, bu da bir Nyuton mayesinin modelinə uyğun gəlir: $c = 577 \text{ sm/san}$, $\delta_1 = 10^{-6} \text{ 1/sm}$.
 olduqda 1-ci rejim üçün $\sigma = 0,26 \text{ dN} / \text{sm}^2$, 2-ci rejim üçün isə $\sigma = 2,89 \text{ dN} / \text{sm}^2$.

NƏTİCƏ

- modelin birinci sinfi üçün, sönmə əmsalı ikinci sinifdən 2 sıra daha kiçikdir;
- ikinci rejimdə özlü gərginlik amplitudası ξ asılı olaraq artır
- birinci rejimdə özlü gərginlik amplitudası λ asılı olaraq azalır
- mayenin qeyri-nyuton xüsusiyyətləri ikinci sinif modeli istifadə edərkən özünü daha çox büruzə verir.

Örtük daxilində mayenin hərəkəti zamanı dalğaların oxa qeyri-simmetrik yayılması halında örtükdə yayılan və burulğan dalğaların sürəti arasındakı fərq yaranmış dalğaların sayının müxtəlif qiymətlərində çox cüzdür. Bu zaman hər iki dalğanın sürəti həcmdəki qabarcıqların miqdarı artdıqca, demək olar ki, üst-üstə düşür.

Örtük daxilində mayenin oxa qeyri-simmetrik dalğavari hərəkəti zamanı mayenin sıxlığının dəyişməsi örtükdə yayılan dalğaların tezliyinə təsir etmir, sürət isə sıxlığın artması ilə 10,9% azalır. Sıxlığın dəyişməsi burulğan dalğaların tezliyinə təsir etmir, sürəti 10,8% azalır. Mayədə yayılan dalğaların sürəti sıxlığın artması ilə orta hesabla 6% azalır.

ƏDƏBİYYAT

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задача упругости / М.: Наука, 1979, 320 с.
2. Амензаде Р.Ю. Волны в неоднородной трубке с протекающей двухфазной жидкостью // Механика композитных материалов. 2003, т.39, №4, с.555-566.
3. Амензаде Р.Ю., Гурбанов С.А. Волны в многослойной вязко-упругой трубе, содержащей жидкость // Bakı Universitetinin Xəbərləri, 1997, №1, с. 155-162
4. Педли Т.Ж. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / М.: Мир, 1983, 400 с.
5. Aliev A.B. Waves in the liquid proceeding in the elastic tube considering viscoelastic friction of the environment // Science And World International Scientific journal №12, Volgograd, 2017, p. 8-10
6. Aliev A.B. On the motion of waves in multilayer elastic tube, containing viscoelastic fluid // Science And World International Scientific journal №12, Volgograd, 2017, p. 10-12
7. Aliev A.B. The exact solution of a problem on pulsating flow of a fluid in a deformable tube // Science And World International Scientific journal №12, Volgograd, 2017, p.12-1
8. Aliev G.A. Pulsating flow of bubble liquid in a visco-elastic tube non homogeneous in length// АМЕА-nın xəbərləri, Bakı, 2005, XXV, №1, s. 153-159

ВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ УПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ВЯЗКОЙ УПРУГОЙ ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

К.Р.РАГИМОВА, А.Б.АЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется пульсирующее течение вязко-упругой несжимаемой жидкости в полубесконечной вязко-упругой трубке переменного кругового сечения. Решение задачи сводится к решению сингулярной краевой задачи Штурма-Лиувилля. В простейшем случае выявлено влияние реологии жидкости на волновые характеристики.

Ключевые слова: волна, вязкая жидкость, упругая трубка, скорость волны, затухание.

**VISCOUS FLOW OF VISCOUS ELASTIC INCOMPRESSIBLE FLUID
IN A SEMI-INFINITE VISCOUS ELASTIC, VARIABLE CROSS-SECTIONAL TUBE**

K.R.RAHIMOVA, A.B.ALIYEV

SUMMARY

The impulsive stream of the none-pressable liquid in the half-infinite viscous-elastic pipe with variable profile is investigated. The solution of the problem is reduced to the solution of the singular boundary Sturm-Luivill problem. In one simple case the influence of the reology of the liquid on the wave characteristics.

Keywords: wave, viscous liquid, elastic tube, velocity of the waves, attenuation.

FİZİKA

PACS 68.65. Cd, 73.50. Bk

ВРЕМЯ РЕЛАКСАЦИИ ПРИ МЕЖЗОННОМ И ВНУТРИЗОННОМ РАССЕЙАНИИ ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ НА ФОНОНАХ В СВЕРХРЕШЕТКАХ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**С.Р.ФИГАРОВА, М.М.МАХМУДОВ***Бакинский Государственный Университет**mehdimahmudov@bsu.edu.az*

В работе вычисляется время релаксации при рассеянии электронов проводимости на акустических и полярных оптических фононах в сверхрешетках в сильном магнитном поле. Изучена вероятность внутризонного и межзонного рассеяния. Установлено, что при рассеянии на акустических фононах в сильном магнитном поле преобладают внутризонные переходы, в то время как при рассеянии на полярных оптических фононах - межзонные. Показано, что время релаксации пропорционально плотности состояний, которая зависит от магнитного поля.

Ключевые слова: время релаксации, сверхрешетка, внутризонное и межзонное рассеяние, плотность состояний.

Для интенсивного применения электронных систем пониженной размерности в наноэлектронике необходимо получить всеобъемлющую информацию о физических характеристиках рассматриваемых систем. Такую информацию можно получить, исследуя электронные явления переноса в низкоразмерных системах. Физические свойства квазидвумерных систем существенно отличаются от свойств обычных изотропных или слабо анизотропных проводников. Различные механизмы рассеяния электронов проводимости значительно влияют на электронные явления переноса. Поэтому при исследовании явлений переноса нужно учитывать всевозможные механизмы рассеяния носителей тока. В квазидвумерных системах анизотропия структуры и энергетического спектра электронов проводимости приводит к особенностям механизмов рассеяния. В отсутствии магнитного поля время релаксации в сверхрешетках довольно хорошо изучено [1-4], в то время как в сильном магнитном поле, которое существенно влияет на механизмы рассеяния таких работ мало. Сильное магнитное поле квантует движение носителей тока и влияет на механизм релаксации. Проявление квантовых эффектов в низкоразмерных системах

делает их привлекательными объектами для фундаментальных исследований [5-9]. Связано это, в первую очередь, со значительными успехами в технологии получения высококачественных структур, а также с возможностью применения традиционных экспериментальных методов, таких как гальвано- и термомагнитные и оптические исследования для изучения свойств низкоразмерных электронных систем. Хотя успехи в физике электронных явлений переноса в двумерных системах велики, до сих пор остаются нерешенные проблемы и возникают новые, которые требуют решения. Поэтому необходимо стремиться к количественному пониманию роли различных механизмов релаксации и влияния сильного, квантующего магнитного поля на явления переноса, их зависимости от параметров структур и внешних условий. Интересны результаты теории и эксперимента, полученного при исследовании магнетополовой зависимости кинетических коэффициентов низкоразмерных электронных систем. В частности, установлено, что в сильном продольном и поперечном магнитном поле возможна смена знака и осцилляции некоторых кинетических коэффициентов, например, магнитосопротивления, магнитотермоэдс, дифференциальной проводимости [10-12]. Следовательно, точное определение механизма рассеяния играет важную роль при сравнении результатов эксперимента с теорией. Целью данной работы является нахождение времени релаксации при внутризонных и межзонных переходах при рассеянии носителей тока на акустических и оптических фононах в сверхрешетках в сильном магнитном поле и изучить влияние магнитного поля на это рассеяние.

Энергетический спектр, волновая функция сверхрешеток в сильном магнитном поле и общее выражение для времени релаксации

В сильном магнитном поле B , параллельном оси сверхрешетки z , имеет место квантование Ландау в плоскости слоя, а учет спина электрона приводит к зеемановскому расщеплению энергетических уровней, при этом закон дисперсии электронов проводимости сверхрешетки в магнитном поле имеет вид:

$$\varepsilon(N, k_z, \sigma) = (2N + 1)\mu B + \varepsilon_0(1 - \cos(ak_z)) + g^* \sigma \mu_0 B, \quad (1)$$

где $N = 0, 1, 2, \dots$ - осцилляторное квантовое число Ландау, k_z - z компонента волнового вектора, σ - оператор спина с собственным значением $\pm 1/2$, $\mu = (m_0 / m_{\perp})\mu_0$, m_0, m_{\perp} - масса свободного электрона и его масса в плоскости слоя сверхрешетки, соответственно, $\mu_0 = e\hbar / 2m_0$ - магнетон Бора, g^* - фактор спинового расщепления, $m_{||}^{-1} = \varepsilon_0 a^2 \hbar^{-2} \cos(ak_z)$, $m_{||}$ - продольная компонента эффективной массы, ε_0 - полуширина минизоны сверхрешетки, a - постоянная сверхрешетки. Плотность состояний энергетического спектра (1) имеет вид:

$$g_B(\varepsilon) = \frac{1}{2(\pi R_B)^2 a} \sum_{N,\sigma} (2\varepsilon_0 \varepsilon_z - \varepsilon_z^2)^{-1/2} = \frac{1}{2(\pi R_B)^2 a \varepsilon_0} \sum_{N,\sigma} \sin^{-1}(a k_z), \quad (2)$$

здесь $k_z = k_z(\varepsilon, N, \sigma)$, $\varepsilon_z = \varepsilon(N, k_z, \sigma) - (2N + 1)\mu B - g^* \sigma \mu_0 B$, $R_B = (\hbar/eB)^{1/2}$ - магнитная длина. Плотность состояний имеет особенность при $\varepsilon_z = 2\varepsilon_0$; если $\varepsilon_z > 2\varepsilon_0$, плотность состояний не зависит от энергии и при большом значении g^* - фактора линейно зависит от магнитного поля.

Энергетический спектр сверхрешеток анизотропный, поэтому следует ожидать, что время релаксации также будет анизотропным. Из работ [13,14] следует, что для анизотропного рассеяния общее выражение для компонент тензора обратного времени релаксации $\hat{\tau}^{-1}$, вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\tau_i} = \sum_{k'} \left| 1 - \frac{k'_i}{k_i} \right| W_{kk'}, \quad (3)$$

где $W_{kk'}$ - вероятность перехода электрона проводимости из k - состояния в k' - состояние, k_i - компоненты волнового вектора.

Из формулы (3) видно, что при вычислении явного выражения компонент тензора обратного времени релаксации и определения их зависимостей от компонент волнового вектора k необходимо использовать явный вид вероятности перехода W_{ij} .

Вероятность рассеяния вычисляется квант механически по известной формуле:

$$W_{ij} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle j | T | i \rangle \right|^2 \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_j), \quad (4)$$

где T - оператор перехода, который если ограничиться низшем порядком теории возмущения (борновское приближение) совпадает с оператором возмущения, входящий в оператор Гамильтона - \hat{H} , равный:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{\mu}{s} \hat{s} \vec{B} + U(x, y, z),$$

где \hat{s} - оператор спина.

Фактическое применение этой формулы в большей степени зависит от того, какой переход изучается. Для вычисления матричного элемента в (4) надо знать волновые функции электрона проводимости, соответствующие энергетическому спектру (1). Для вычисления матричного элемента возмущенного гамильтониана (4) необходимо знать волновую функцию, которая имеет вид:

$$\Psi(\vec{r}) = \varphi(x - x_0) \phi(z) e^{ik_x y} \chi, \quad (5)$$

здесь

$$\varphi(x-x_0) = \frac{1}{\sqrt{R}} H_N \left(\frac{x-x_0}{R} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-x_0}{R} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где H_N - полином Эрмита N - порядка, $x_0 = -\hbar k_y / \Omega m_n$, обусловлена квантованием в магнитном поле

$$\phi(z) = \sqrt{\frac{a}{V}} \sum e^{ik_z an} \xi(z-an), \quad (7)$$

где $\phi(z)$ - волновая функция электрона в сверхрешетки с осью в направлении z равна $\xi(z) = \begin{cases} \sin(\pi z/a), & 0 \leq z < a \\ 0, & b \leq z < 0 \end{cases}$, n - число слоев,

$\chi = s_z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha, & 0 < \alpha < \pi/2 \\ e^{i\beta} \sin \alpha, & 0 < \beta < 2\pi \end{pmatrix}$ - волновая функция, связанная с расщеплением спина в магнитном поле, $a + b$ - период сверхрешетки.

Время релаксации при рассеянии на фононах

При выполнении условий $k_0 T \leq \mu B$, можно ввести время релаксации [12,13]. Подставляя формулы (5-7) в (4) получим выражение для обратного времени релаксации. Рассмотрим рассеяние носителей тока на акустических и неполярных оптических фононах, для которых вероятность перехода электрона проводимости из состояния k' в состояние k , благодаря взаимодействию с фононами, определяется выражением:

$$W(k, k') = \sum w(q) |\Psi|^2 (A_{k, k'}^+(q) + A_{k, k'}^-(q)), \quad (8)$$

где $A_{k, k'}^\pm(q) = \left(N_q + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \right) \delta(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k \mp \hbar \omega(q)) \delta_{k', k \pm q}$. Для акустических фононов с частотой $\omega(q)$ - $w_1(q) = \frac{\pi E_1^2 q^2}{NM \omega(q)}$. Для неполярных оптических

фононов с частотой ω_0 , если не учитывать дисперсию

$$w_2(q) = \frac{\pi E_0^2}{NM \omega_0} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2. \text{ Для полярных оптических фононов с частотой } \omega_0$$

$$w_3(q) = \frac{4\pi^2 e^2 \omega(q)}{V \kappa q^2}. \text{ Для пьезоакустических фононов с частотой } \omega(q)$$

$$w_4(q) = \frac{\pi E_{1pz}^2}{\kappa^2 NM \omega(q)}. \text{ Здесь } E_1, E_0 - \text{ константы акустического и оптического}$$

потенциала деформации, соответственно, N_q - функция Планка, M - масса элементарной ячейки, N - число элементарных ячеек, a - постоянная решетки, κ - диэлектрическая проницаемость кристалла. Для акустиче-

ских и неполярных оптических фононов при не очень низких температурах (когда $k_0 T > \hbar \omega$) можно считать, что процесс носит упругий характер и в аргументе δ -функции можно пренебречь энергией фонона. Тогда в этих случаях после вычисления матричных элементов с помощью волновой функции (5) можно записать:

$$W(k, k') = C_{1,2} \delta(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k), \quad (9)$$

где $C_1 = \frac{2\pi E_1^2 k_0 T}{NM \hbar v_0^2}$ - для акустических фононов, здесь v_0 - скорость звука ,

$$C_2 = \frac{\pi E_0^2}{NM \omega_0} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 - \text{для неполярных оптических фононов.}$$

Учитывая (9) в (3), для компонент обратного тензора времени релаксации получим [13]:

$$\frac{1}{\tau_B(\varepsilon)} = \frac{2\pi}{\hbar} \int_0^\infty \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} D(q_\perp) \exp\left(-\frac{1}{2} R_B^2 q_\perp^2\right) \left[(N_q + 1) \delta(\varepsilon_{k_z} - \varepsilon_{k_z - q_z} - \hbar \omega_q) + N_q \delta(\varepsilon_{k_z} - \varepsilon_{k_z - q_z} + \hbar \omega_q) \right]. \quad (10)$$

При рассеянии на деформационном потенциале $D(q_\perp) = D_0 q_\perp$, где $D_0 = \hbar E_1^2 / 2\rho v_0$, здесь ρ - плотность кристалла. В формуле (10) импульс фонона q_z входит только в δ -функцию и поэтому интегрирование по q_z для $\tau_B(\varepsilon)$ - обратного времени релаксации по импульсам в квантующем магнитном поле дает:

$$\frac{1}{\tau_B(\varepsilon)} = \frac{2\pi}{\hbar} R_B^2 \int_0^\infty dq_\perp q_\perp D(q_\perp) \exp\left(-\frac{1}{2} R_B^2 q_\perp^2\right) \left[(N_q + 1) g(\varepsilon - \hbar v_0 q_\perp) + N_q g(\varepsilon + \hbar v_0 q_\perp) \right], \quad (11)$$

В области квазиупругого рассеяния $\varepsilon > \hbar v_0 p_B$, где $p_B = R_B^{-1}$, из (11) получим:

$$\frac{1}{\tau_B(\varepsilon)} = \frac{2\pi}{\hbar} D_n g_B(\varepsilon), \quad (12)$$

здесь введен эффективный коэффициент

$$D_n = R_B^2 \int_0^\infty dq_\perp q_\perp^n \exp\left(-\frac{1}{2} R_B^2 q_\perp^2\right) D(q_\perp) (2N_q + 1), \quad (13)$$

который зависит от температуры и магнитного поля. Таким образом, в квантующем магнитном поле время релаксации при рассеянии на акустических и неполярных оптических фононах будет обратно пропорционально плотности состояний электронов в магнитном поле в расчете на одну подзону Ландау. Зависимость времени релаксации от энергии опре-

деляется исключительно плотностью состояний, по мере удаления электрона от дна зоны рассеяние ослабевает. Зависимость времени релаксации от магнитного поля тоже входит через плотность состояний и импульс фонона $q \cong p_B$ (где p_B определяется из выражения $k_{\perp}^2 = p_B^2(2N+1)$, $p_B = R_B^{-1}$) с которым взаимодействует электрон. При каждом акте рассеяния электрон смещается поперек магнитного поля B на расстояние порядка R_B . Для внутризонных переходов $n=1$ в интеграле (13), а для межзонных - $n=3$ Интеграл D_1 легко вычисляется в области индуцированного $k_0 T \gg \hbar v_0 p_B$ и спонтанного рассеяния $k_0 T \ll \hbar v_0 p_B$.

При индуцированном рассеянии, когда $\hbar v_0 q \leq k_0 T$ (v_0 - скорость звука, q - волновой вектор фонона),

$$D_1(T, B) = \frac{k_0 T E_1^2}{\rho v_0^2}. \quad (14)$$

При спонтанном рассеянии, когда $\hbar v_0 q \geq k_0 T$,

$$D_1(T, B) = \sqrt{\frac{2\pi}{R_B^2}} \frac{\hbar E_1^2}{v_0 \rho}. \quad (15)$$

Окончательно, при квазиупругом рассеянии электронов проводимости на акустических фононах ($\varepsilon > \hbar v_0 / R_B$) для времени релаксации на акустических фононах при внутризонных и межзонных переходах имеем [14]:

$$(\tau_B^{-1})_{\text{вз}} = \frac{2\pi}{\hbar} D_1 g_B(\varepsilon), \quad (16)$$

$$(\tau_B^{-1})_{\text{мз}} = \frac{2\pi}{\hbar} D_3 g_B(\varepsilon), \quad (17)$$

При рассеянии на акустических фононах отношение внутризонного времени релаксации к межзонному равно:

$$\frac{\tau_{\text{вз}}}{\tau_{\text{мз}}} = \frac{a}{R_B}. \quad (18)$$

Можно показать, что для постоянной сверхрешетки 10 nm в полях меньше 7 Tл время релаксации при внутризонных переходах будет меньше, чем при межзонных с дальнейшим ростом магнитного поля при $B \propto 7 \text{ Tл}$ они становятся одного порядка, в сильных магнитных полях больше 7 Tл внутризонное рассеяние превалирует (рис.1).

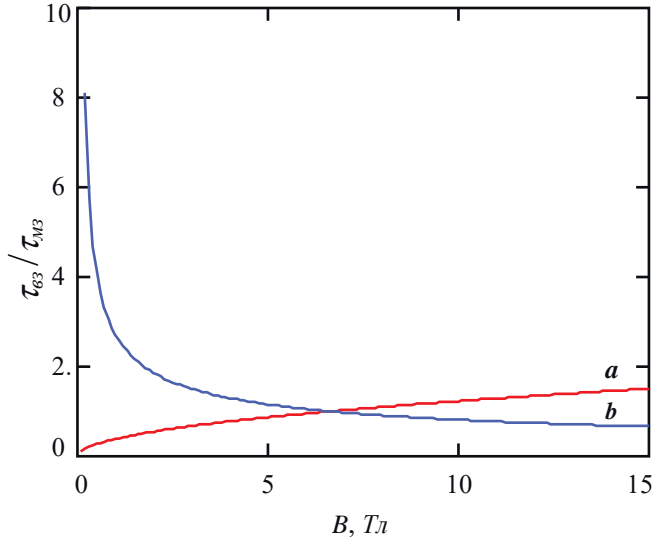


Рис.1. Зависимость отношения внутризонного времени релаксации к межзонному от магнитного поля: *a* - при рассеянии на акустических фононах; *b* - при рассеянии на полярных оптических фононах ($a = 10 \text{ нм}$).

Подставляя (14) и (15) в (16), для внутризонного рассеяния получим, соответственно:

при индуцированном рассеянии

$$(\tau_B^{-1})_{\text{вз}} = A_0 g_B(\varepsilon),$$

где $A_0 = \frac{2\pi k_0 T E_1^2}{\hbar \rho v_0^2}$, а при спонтанном рассеянии

$$(\tau_B^{-1})_{\text{вз}} = A_1 R_B^{-1} g_B(\varepsilon),$$

где $A_1 = \frac{(2\pi)^{3/2} E_1^2}{\rho v_0}$.

Следует отметить, что если индукция магнитного поля будет достаточно велика для того, чтобы и переходы между подзонами Ландау в процессе рассеяния были подавлены, то имеет место только внутризонное рассеяние. Если считать $v_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$, то в области азотных температур в сильных магнитных полях до 30 Тл преобладает индуцированное рассеяние.

Исходя из формулы (8), и учитывая выражения для $w(q)$ при рассеянии на полярных оптических фононах и на пьезоакустических фононах для времени релаксации получим:

при внутризонном рассеянии

$$(\tau_B^{-1})_{\text{вз}} = A_2 \frac{R_B a}{Z} g_B(\varepsilon), \quad (19)$$

а при межзонном рассеянии

$$(\tau_B^{-1})_{мз} = A_2 \frac{R_B^2}{Z} g_B(\varepsilon), \quad (20)$$

где $Z = ak_z$, $A_2 = \frac{2\pi e^2 \omega_0}{\kappa(2N_q + 1)}$, N_q - функция распределения фононов

Планка.

При рассеянии на полярных оптических фононах отношение внутризонного времени релаксации к межзонному будет противоположно аналогичному для акустических фононов и равно:

$$\frac{\tau_{вз}}{\tau_{мз}} = \frac{R_B}{a}. \quad (21)$$

Следует отметить, что при рассеянии на оптических фононах рассеяние будет неупругим и время релаксации при низких температурах можно ввести только, когда имеет место только процесс с поглощением фонона. Благодаря этому процессу происходит релаксация по импульсу, а энергия не меняется, при этом $\varepsilon \ll \hbar\omega_0$.

Из рис.1 следует, что в случае рассеяния электронов проводимости на оптических фононах зависимость времени релаксации от магнитного поля сильнее, чем в случае рассеяния на акустических фононах, однако при этом рассеянии в сравнительно слабых магнитных полях преобладают внутризонные переходы, в то время как в сверхсильных магнитных полях - межзонные. Тот факт, что время релаксации внутризонных переходов значительно превосходит частоту межзонных при оптических переходах согласуется с результатами работы [15].

Аналитические выражения для времени релаксации, удобные при вычислении кинетических коэффициентов, удалось получить в приближении длинноволновых фононов и используя тот факт, что в сверхрешетках $m_z \gg m_\perp$. Отметим, что магнитное поле уменьшает степень упругости рассеяния.

Время релаксации имеет общую структуру $\tau^{-1} \propto W(\varepsilon)g(\varepsilon)$, что соответствует золотому правилу Ферми. В данной работе спиновое расщепление учитывалось только через плотность состояний, в то время как квантование Ландау и структура сверхрешетки через плотность состояний и вероятность перехода.

Заключение. В работе изучается влияние внутризонных и межзонных переходов на время релаксации сверхрешеток с косинусоидальным законом дисперсии при рассеянии носителей тока на акустических и полярных оптических фононах в сильных магнитных полях. Показано, что обратное время релаксации пропорционально плотности состояний, существенно зависящей от магнитного поля. Получено, что в

полях до $7 T_l$ при рассеянии на акустических фононах основной вклад дают межзонные переходы, в то время как при рассеянии на полярных оптических фононах в предельно сильных магнитных полях имеет место обратный эффект - межзонные переходы превалируют, становятся более значительными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Драгунов В.П., Неизвестный И.Г., Гридчин В.А. Основы нанoeлектроники. М.: Логос, 2006, 496 с.
2. Davies J.H. The physics of low-dimensional semiconductors. Cambridge University press 1998. 438 p.
3. Горский П.В. Эффект Капицы в кристаллах со сверхрешеткой. ФТП, 2004, т.38, в.7 с.864-868.
4. Askerov B.M., Kuliev B.I., Figarova S.R., Qadirova I.R. Electron-phonon scattering and anisotropy of conductivity in quasi-two-dimensional systems. J.Phys. Condens. Matter, 1995, v. 7, p.843-848.
5. Комник Ю.В., Андриевский В.В., Беркутов И.Б. Проявление спин-орбитального взаимодействия в пленках висмута в параллельном магнитном поле. Физика низких температур, 2007, т.33, в.1, с.105-114.
6. Perov A.A., Penyagin I.V. Quantum states of charge carriers and longitudinal conductivity in double periodic n-type semiconductor lattice structures in electric field. Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2015, т. 121, № 1, p.110-114.
7. Breitkreiz M., Brydon P.M.R., Timm C. Transport anomalies due to anisotropic interband scattering. Physical Review B, 2013, 88(8), p.085103.
8. Askerov B.M., Figarova S.R., Mahmudov M.M., Figarov V.R. Diamagnetism of an Electron Gas in Superlattices. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2008, 464, p.3213-3218.
9. Askerov B.M., Figarova S.R., Mahmudov M.M., Figarov V.R. Entropy of Superlattices in a Quantized Magnetic Field. Japanese Journal of Applied Physics, 2011, 50, p.05FE10- 1-05FE10-2.
10. Askerov B.M., Figarova S.R., Mahmudov M.M. Longitudinal magnetoresistance of layered crystals in a quantizing magnetic field taking into account the spin splitting. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2006, 33(2), p.303-307.
11. Kumar R.K., Chen X., Auton G.H., Mishchenko A., Bandurin D.A., Morozov S.V., Cao Y., Khestanova E., Ben Shalom M., Kretinin A.V., Novoselov K.S., Eaves L., Grigorieva I.V., Ponomarenko L.A., Fal'ko V.I., Geim A.K. High-temperature quantum oscillations caused by recurring Bloch states in graphene superlattices. Science, 2017, 357 (6347), p.181-184.
12. Pal G., Apel W., Schweitzer L. Landau Level splitting due to grapheme superlattices. Physical Review B, 2012, 85, p.235457.
13. Gantmakher V.F., Levinson Y.B. Carrier scattering in metals and semiconductors. Elsevier Science 2012, 478 p.
14. Askerov B.M., Figarova S.R. Thermodynamics, Gibbs Method and Statistical Physics of Electron Gases. Berlin: Springer Verlag, 2010, 374 p.
15. Алешкин В.Я., Дубинов А.А. Инверсия электронной населенности подзон размерного квантования при продольном транспорте в туннельно-связанных квантовых ямах. ФТП, 2002, т.36, в.6, с.724-729.

GÜCLÜ MAQNİT SAHƏSİNDƏ İFRATQƏFƏSLƏRDƏ KEÇİRİCİLİK ELEKTRONLARININ FONONLARDAN ZONAARASI VƏ ZONADAXİLİ SƏPİLMƏSİ ZAMANI RELAKSASIYA MÜDDƏTİ

S.R.FİQAROVA, M.M.MAHMUDOV

XÜLASƏ

İşdə güclü maqnit sahəsində olan ifratqəfəslərdə keçiricilik elektronlarının akustik və polyar-optik fononlardan səpilməsi zamanı relaksasiya müddəti hesablanmışdır. Zonaarası və zonadaxili səpilmənin ehtimalı öyrənilmişdir. Tapılmışdır ki, güclü maqnit sahəsində akustik fononlardan səpilmə zamanı zonalardaxili səpilmə üstünlük təşkil etdiyi halda, polyar-optik fononlardan səpilmə zamanı zonalarası səpilmə üstünlük təşkil edir. Göstərilmişdir ki, relaksasiya müddəti maqnit sahəsindən asılı olan hal sıxlığı funksiyasına mütənasibdir.

Açar sözlər: relaksasiya müddəti, ifratqəfəs, zonaarası və zonadaxili səpilmə, hal sıxlığı.

RELAXATION TIME FOR INTERBAND AND INTRABAND SCATTERING OF CONDUCTION ELECTRONS BY PHONONS IN SUPERLATTICES IN A STRONG MAGNETIC FIELD

S.R.FIGAROVA, M.M.MAHMUDOV

SUMMARY

In the paper, the relaxation time of conduction electrons for the scattering on acoustic and polar optical phonons in superlattices in a strong magnetic field is calculated. Has been studied the probability of intraband and interband scattering. It was found that in a strong magnetic field for scattering by acoustic phonons, intraband transitions prevail, while in scattering by polar optical phonons, interband transitions prevail. It is shown that the relaxation time is proportional to the density of states, which depends on the magnetic field.

Keywords: relaxation time, superlattice, intraband and interband scattering, density of states.

УДК 539.172.5

**КАСКАДНАЯ ТЕОРИЯ МЮОННО-ФОТОННОГО ЛИВНЯ
В КРИСТАЛЛАХ С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЙ
ФОТОНОВ И ПРОДОЛЬНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЙ МЮОНОВ****М.Р.РАДЖАБОВ***Бакинский Государственный Университет**m_rajabov@mail.ru*

Развита теория каскадного мюонно-фотонного ливня в кристаллах с учетом линейной поляризации γ -квантов и продольных поляризации мюонов. Исследована функция распределения ливневых γ -квантов в зависимости от глубины их проникновения, энергии и спиновых состояний ливневых частиц.

Ключевые слова: электромагнитный ливень, фотон, мюон, поляризация.

В связи с проектированием детекторов для SSC-суперколлайдера [1], а также с созданием в настоящее время в различных странах (DESY, SLAC, ОИЯИ, Дубна др) мюонных детекторов для изучения взаимодействия высокоэнергетических мюонов с веществом возник значительный интерес к исследованиям неупругих электромагнитных взаимодействий быстрых мюонов с атомами и ядрами [2-4]. Прохождение быстрых заряженных частиц e^- , e^+ , μ^\pm высокоэнергетических γ -квантов через вещество сопровождается различными электромагнитными явлениями: такими, как тормозное излучение и фоторождение лептонных пар, черенковское и переходное излучения, каналирование заряженных частиц и др. Известно что, при прохождении высокоэнергетических фермионов и γ -квантов через вещество вследствие взаимодействия их с атомными ядрами могут возникать электромагнитные ливни. Электромагнитные ливни в кристаллах значительно сложнее ливней в аморфном веществе. Ливень в кристалле обладает ориентационной зависимостью своих характеристик (распределений по множественности ливневых частиц, импульсного распределения частиц и т.д.) от угла θ между импульсом первичной частицы и кристаллографической осью. Кроме того, эти характеристики сложным образом зависят от энергии частицы и свойства кристалла. Взаимодействие высокоэнергетических электронов ($E > 100$ МэВ) с монокристал-

лом при определенных углах носит коллективный когерентный характер, в отличие от взаимодействия на отдельных центрах в аморфной среде (механизм Бете-Гайтлера). В области энергии электронов и γ -квантов 10-1000 ГэВ при малых углах входа ($\theta \ll \theta_{\text{сп}} = V_0/m$) когерентный механизм имеет особенность, получившую название «постоянного сильного поля» (ПСП), в результате которой резко возрастают сечения всех электромагнитных процессов. Справедливость ПСП приближения для разных кристаллов определяется условием: $V_0 \varepsilon / m^2 \gg 1$, где $V_0 \approx Ze^2 / a$ - шаг решетки, масштаб усредненного потенциала оси (плоскости), e и m - заряд и масса электрона, a - шаг решетки, ε - энергии электрона или γ -кванта.

Отметим, что наряду с электронными ливнями могут возникать мюонно-фотонные ливни. В отличие от электронов мюоны имеют большие пробеги в веществе и активно участвуют как в электромагнитном, так и в слабом взаимодействиях. Поэтому мюонные пучки с успехом могут быть использованы для исследования свойств и структуры ядер.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию развития мюонно-фотонного ливня с учетом линейной поляризации γ -кванта и спиральностей мюонов, которое имеет прямое отношение к проблеме радиационной защиты сверхпроводящих магнитных систем ускорителей новых типов УНК и др.

Рассмотрим мюон (μ^-), влетающий в монокристалл под малым углом к одной из его кристаллографических осей. Перечисленные спектральные характеристики потока вторичных частиц в теории мюонно-фотонных ливней получает при решении интегро-дифференциальных уравнений, которые называют каскадными. Если энергия частицы больше некоторой критической величины $\bar{\varepsilon} = 750/Z$ МэВ, то он будет генерировать ливень, развитие которого описывается следующими уравнениями [6]:

$$\frac{\partial p(x, E)}{\partial x} = 2 \int_E^{\infty} \omega_p(E, E' - E) \Gamma(x, E') dE' + \int_E^{\infty} \omega_\gamma(E', E) p(x, E') dE' - \int_0^E \omega_\gamma(E, E') p(x, E) dE', \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Gamma(x, E)}{\partial x} = \int_E^{\infty} \omega_\gamma(E', E' - E) p(x, E') dE' - \int_0^E \omega_p(E', E - E') \Gamma(x, E) dE' \quad (2)$$

Здесь x - расстояние от верхней границы ливня до точки исследования. Для удобства в дальнейшем глубину проникновения в кристалл будем

измерять в безразмерных единицах $t = x/R$, где $R = \left[4\alpha \left(r_0 \frac{m}{\mu} \right)^2 N \ln(183Z^{-1/3}) \right]^{-1}$

-так называемая радиационная длина для мюона. Величины $p(x, E)dE$ и $\Gamma(x, E)dE$ характеризуют число мюонов и фотонов, имеющих энергию между E и $E + dE$, находящихся на расстоянии x от верхней границы лив-

ня, на которую падает первоначальная частица.

Учет линейных поляризаций тормозных квантов и продольных поляризаций мюонов в кристаллах проводится следующим образом.

В качестве плоскости поляризации выберем плоскость (\vec{q}, \vec{p}) , где \vec{q} - импульс отдачи ядра, \vec{p} - импульс начального мюона. Введем обозначения $d\sigma_{\perp}^T$ и $d\sigma_{par}^T$, $d\sigma_{\perp}^p$ и $d\sigma_{par}^p$ для эффективных сечений рождения тормозных фотонов, поляризованных перпендикулярно и параллельно плоскости (\vec{q}, \vec{p}) , и сечений фоторождения $\mu^- \mu^+$ -пар γ -квантами, поляризованными перпендикулярно и параллельно плоскости падения (\vec{k}, \vec{b}_1) соответственно с учетом спиновых состояний мюонов, где \vec{k} - импульс γ -кванта, \vec{b}_1 - направление одной из кристаллических осей[5].

$$d\sigma_{\perp}^i = \frac{1}{4} \sigma_0 d\omega \left\{ \frac{(E^2 + E'^2)(\psi_1^c + \psi_1^i) - 2/3 EE'(\psi_2^c + \psi_2^i) + 2EE' \psi_3^i}{E^2(E - E')} + \right. \\ \left. + \xi \xi' \frac{(E^2 + E'^2)(\psi_1^c + \psi_1^i) - 2/3(E^2 + E'^2 - EE'(\psi_2^c + \psi_2^i) + 2EE' \psi_3^i)}{E^2(E - E')} \right\} \\ d\sigma_{par}^i = \frac{1}{4} \sigma_0 d\omega \left\{ \frac{(E^2 + E'^2)(\psi_1^c + \psi_1^i) - 2/3 EE'(\psi_2^c + \psi_2^i) - 2EE' \psi_3^i}{E^2(E - E')} + \right. \\ \left. + \xi \xi' \frac{(E^2 + E'^2)(\psi_1^c + \psi_1^i) - 2/3(E^2 + E'^2 - EE'(\psi_2^c + \psi_2^i) - 2EE' \psi_3^i)}{E^2(E - E')} \right\} \quad (3)$$

$$d\sigma_{\perp}^p = \frac{1}{4} \sigma_0 dE' \left\{ \frac{(E^2 + E'^2)(\psi_1^c + \psi_1^i) + 2/3 EE'(\psi_2^c + \psi_2^i) - 2EE' \psi_3^i}{(E + E')^3} - \right. \\ \left. - \xi_+ \xi_- \frac{(E^2 + E'^2)(\psi_1^c + \psi_1^i) - 2/3(E^2 + E'^2 + EE'(\psi_2^c + \psi_2^i) - 2EE' \psi_3^i)}{(E + E')^3} \right\} \\ d\sigma_{par}^p = \frac{1}{4} \sigma_0 dE' \left\{ \frac{(E^2 + E'^2)(\psi_1^c + \psi_1^i) + 2/3 EE'(\psi_2^c + \psi_2^i) + 2EE' \psi_3^i}{(E + E')^3} - \right. \\ \left. - \xi_+ \xi_- \frac{(E^2 + E'^2)(\psi_1^c + \psi_1^i) - 2/3(E^2 + E'^2 + EE'(\psi_2^c + \psi_2^i) + 2EE' \psi_3^i)}{(E + E')^3} \right\} \quad (4)$$

Здесь $\sigma_0 = Nz^2 \alpha (r_0 \frac{m}{\mu})^2$, E и E' - значения энергии начального (E) и конечного (E') мюонов в (2) E' - энергии мюона, z -зарядовый номер атомов, r_0 - классический радиус электрона, m и μ - массы соответственно электрона и мюона. Функции $\psi_{1,2}^c(\delta)$ характеризуют аморфную, а $\psi_{1,2,3}^i$ - интерференционную части сечения процессов, выражения которых приведены в [5], где $\delta = \omega/2EE'$, θ - полярный угол между импульсом на-

чальной частицы \vec{p} (или \vec{k}) и кристаллографической осью \vec{b}_1 . α – азимутальный угол между плоскостью падения (\vec{p}, \vec{b}_1) и кристаллической плоскостью (\vec{b}_1, \vec{b}_2) , ω – энергия фотона.

Непосредственная подстановка выражений (3) и (4) в каскадные уравнения (1) и (2) исключает возможность их аналитического решения, так как функции $\psi_{1,2,3}^i(\delta, \theta, \alpha)$ зависят сложным образом не только от E и E' , но и от углов вхождения частицы в кристалл θ и α . Необходимо делать упрощения.

Предположим, что начальной частицей является мюон с энергией $E_0 \gg \mu c^2$, входящий в монокристалл под углом $\theta = 1$ мрад к кристаллографической оси \vec{b} . Для мюона наиболее вероятный угол испускания γ кванта равен $-\mu/E$ рад. Если энергия начальной частицы достаточно велика ($E_0 \approx 100$ ГэВ), то вероятный угол испускания γ -квантов $\sim 10^{-3}$ рад, т.е. примерно равен углу θ .

Движение рассеянного мюона происходит примерно при таком же угле по отношению к импульсу начальной частицы. Видно, что в этом случае плоскости (\vec{b}_1, \vec{k}) и (\vec{b}_1, \vec{p}') , где \vec{k} и \vec{p}' – импульсы фотона и рассеянного мюона соответственно, образуют примерно тот же угол с кристаллографической плоскостью (\vec{b}_1, \vec{b}_2) , что и плоскость падения начального мюона. Тогда можно сделать следующие допущения: углы θ и α будем считать приблизительно постоянными и равными углам, определяющим ориентацию пучка начальных мюонов относительно оси \vec{b}_1 , и плоскости (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Тогда функции $\psi_{1,2,3}^i(\delta, \theta, \alpha)$ необходимо усреднить по углам θ и α . В этом случае функции $\bar{\psi}_1^i$, $\bar{\psi}_2^i$ и $\bar{\psi}_3^i$ значительно упрощаются и принимают следующий вид:

$$\bar{\psi}_1^i = \bar{\psi}_2^i = \bar{\psi}_3^i = \frac{8\pi}{\Delta} \sum_{\vec{g}} |S(\vec{g})|^2 \frac{\exp(-A_1 \vec{g}^2) g_{\perp}}{(\beta^{-2} + \vec{g})^2 \theta} \quad (5)$$

$$\bar{\psi}_3^i = \bar{\psi}_i / 3,$$

где $\beta = 111z^{-1/3}$, \vec{g} – вектор обратной решетки. Поскольку выражение (5) не зависит от энергии мюона и тормозного фотона, вероятность испускания перпендикулярно и параллельно поляризованных мягких фотонов в кристалле высокоэнергетическими мюонами достаточно хорошо описывается выражением

$$\omega_{\gamma}^{\perp, par} = \frac{\alpha}{R} \left\{ \frac{E^2 + E'^2 - 2/3EE'(1 \mp \eta)}{E^2(E - E')} + \xi \xi' \frac{E^2 + E'^2 + 2EE'(1 \pm \eta)}{3E^2(E - E')} \right\}, \quad (6)$$

где, $\alpha = (\psi^c + \bar{\psi}^i)/(16 \ln(183z^{-1/3}))$, $\eta = \bar{\psi}^i/(\psi^c + \bar{\psi}^i)$.

Проанализировав процесс образования $\mu^+ \mu^-$ -пар при большой энергии, мы получим следующее выражение для вероятности образования $\mu^+ \mu^-$ -пар перпендикулярно и параллельно поляризованным γ -квантом:

$$\omega_3^{\perp, par} = \frac{\alpha}{R} \left\{ \frac{E^2 + E'^2 + 2/3EE'(1 \mp \eta)}{(E + E')^3} - \xi_+ \xi_- \frac{E^2 + E'^2 - 2EE'(1 \pm \eta)}{3(E + E')^3} \right\}. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (1) и (2), применяя преобразования Лапласа-Меллина, мы приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dP_s}{dt} &= -\alpha A^{\perp, par}(s, \xi, \xi') P_s^{\perp, par} + \alpha B(s, \xi_+, \xi_-) \Gamma_s^{\perp, par}, \\ \frac{d\Gamma_s}{dt} &= \alpha C^{\perp, par}(s, \xi, \xi') P_s^{\perp, par} - \alpha D(s, \xi_+, \xi_-) \Gamma_s^{\perp, par} \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь коэффициенты $A^{\perp, par}(s, \xi, \xi')$, $B^{\perp, par}(s, \xi, \xi')$, $C^{\perp, par}(s, \xi, \xi')$, $D^{\perp, par}(s, \xi, \xi')$, зависящие не только от параметра Меллина s , но также и от поляризации начальных и конечных мюонов, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A^{\perp, par}(s, \xi, \xi') &= A_1^{\perp, par}(s) + \xi \xi' A_2^{\perp, par}(s), \\ B^{\perp, par}(s, \xi, \xi') &= B_1^{\perp, par}(s) - \xi_+ \xi_- B_2^{\perp, par}(s), \\ C^{\perp, par}(s, \xi, \xi') &= C_1^{\perp, par}(s) + \xi \xi' C_2^{\perp, par}(s), \\ D^{\perp, par}(s, \xi, \xi') &= D_1^{\perp, par}(s) - \xi_+ \xi_- D_2^{\perp, par}(s). \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_i^{\perp, par}$, $B_i^{\perp, par}$, $C_i^{\perp, par}$, $D_i^{\perp, par}$ ($i = 1, 2$) приведены в [5].

Решения системы дифференциальных уравнений (8) имеют вид

$$\begin{aligned} P_s(t) &= a_1(s, \xi, \xi', \xi_{\pm}) \exp(-\lambda_1^{\perp, par} t) + a_2(s, \xi, \xi', \xi_{\pm}) \exp(-\lambda_2^{\perp, par} t), \\ \Gamma_s(t) &= b_1(s, \xi, \xi', \xi_{\pm}) \exp(-\lambda_1^{\perp, par} t) + b_2(s, \xi, \xi', \xi_{\pm}) \exp(-\lambda_2^{\perp, par} t), \end{aligned}$$

где функции $\lambda_1^{\perp, par}$ и $\lambda_2^{\perp, par}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2} \sqrt{(A - D)^2 + 4BC} + \frac{A + D}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{(A - D)^2 + 4BC} + \frac{A + D}{2}. \end{aligned}$$

Применение метода, развитого в [7], позволяет нам определить функции распределения по энергии и глубине проникновения ливневых γ -квантов в монокристалле:

$$\Gamma^{\perp, pa}(E_0, E, t) = \frac{V^{\perp, par} \exp(sy - \lambda_1^{\perp, par} t_{\perp, par})}{s \sqrt{-2\pi \lambda_1^{\perp, par} t_{\perp, par} + 1/s^2}}, \quad (9)$$

где

$$t_{\perp,par} = \frac{1}{(\lambda_1^{\perp,par})'} \ln\left(\frac{E}{E_0} - 1/s\right), \quad y = \ln\left(\frac{E}{E_0}\right),$$
$$V^{\perp,par} = \frac{(\lambda_2^{\perp,par} - \alpha A^{\perp,par})(\alpha A^{\perp,par} - \lambda_1^{\perp,par})}{(\lambda_2^{\perp,par} - \lambda_1^{\perp,par})\alpha B^{\perp,par}}$$

Используя последние формулы, можно вычислить число γ -квантов в ливне на заданной глубине, обладающих заданной энергией и интересующей нас поляризацией. В зависимости от спиновых корреляций ливневых частиц можно получить по разному поляризованные ливни.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reference Desing Study for the SSC Berkeley: Reference Study Group. 1984
2. Van Ginneken A. // Nucl. Instrum. Methods. A. 1986. V. 251. P. 21.
3. Tannenbanm M.J. Preprint CERN-PRE/91-134. 1991.
4. Sakumoto W.K. et.al. // Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. 3042
5. Наджафов И.М., Зфвжабов М.Р. // Изв. РАН. Сер. физ. 1992. Е. 56. №5. С. 69.
6. Ландау Л.Д., Зумер Ю.Б. Собрание трудов. Т. 1. 1969. С. 302.

FOTONLARIN XƏTTİ VƏ MÜONLARIN UZUNUNA POLYARİZASİYASINI NƏZƏRƏ ALMAQLA KRİSTALLARDA MÜON-FOTON LEYSANININ KASKAD NƏZƏRİYYƏSİ

M.R.RƏCƏBOV

XÜLASƏ

Fotonların xətti polyarizasiyasını və müonların uzununa polyarizasiyasını nəzərə almaqla kristallarda müon-foton leysanının kaskad nəzəriyyəsi işlənib hazırlanmışdır. Ley-sanda iştirak edən fotonlarının paylanma funksiyası, onların nüfuz dərinliyindən, enerjisindən və leysan zərrəciklərinin spin vəziyyətindən asılılığı nəzəri olaraq tədqiq edilmişdir.

Açar sözlər: elektromaqnit leysanı, foton, müon, polyarizasiya

CASCADE THEORY OF MUON-PHOTON SHOWER IN CRYSTALS WITH THE LINEAR POLARIZATION OF PHOTONS AND THE LONGITUDINAL POLARIZATION OF MUONS

M.R.RAJABOV

SUMMARY

The theory of a cascade muon-photon shower in crystals, with the linear polarization of photons and the longitudinal polarization of muons is developed. The depending the distribution function of shower photons on the depth of their penetration, energy and spin states of shower particles is investigated.

Keywords: electromagnetic shower, photon, muon, polarization

UOT 538.97:539.23

YARIMMAQNİT YARIMKEÇİRİCİLƏRDƏ AŞAĞI TEMPERATUR
VƏ PARAMAQNİT ZƏRRƏCİKLƏRİN
YÜKSƏK KONSENTRASIYASINDA
NÜVƏ MAQNİT REZONANS ƏYRİSİNİN HESABLANMASI

A.C.MƏMMƏDZADƏ, M.N.ƏLİYEV

*Bakı Dövlət Universiteti**memmedzade.aygun98@mail.ru , mammadaliyev@hotmail.com*

Məqalədə Yarımmaqnit Yarımkeçiricilərdə aşağı temperatur və paramaqnit zərrəciklərin yüksək konsentrasiyasında nüvə maqnit rezonans xətti Qrin funksiyası metodu ilə hesablanmışdır. Lokal maqnit sahəsinin sürətli fluktuasiyasında və yavaş fluktuasiyasında rezonans əyrisinin formasına baxılmışdır.

Açar sözlər: Yarımmaqnit Yarımkeçirici, aşağı temperatur, yüksək konsentrasiya, paramaqnit ion, rezonans xətti, Qrin funksiyası

Yarımmaqnit Yarımkeçiricilərdə aşağı temperatur və aşağı konsentrasiyalarda Nüvə Maqnit Rezonans xəttinin formasını araşdırarkən qeyd olunur ki, rezonans xəttinin formasının quruluşu sistemdə baş verən qarşılıqlı təsirlərdən asılıdır. Bu qarşılıqlı təsirlərin spin dəyişənlərinin fluktasiyalarına səbəb olur və bu fluktasiyaların nüvələr üzərindəki fluktasiya edən lokal sahə yaratdığını qeyd edə bilərik. Öz növbəsində bu lokal maqnit sahəsinin rezonans xəttinin formasını əmələ gətirir. Bu halda paramaqnit ionların konsentrasiyası aşağı olduğuna görə onlar arasında spin-spin qarşılıqlı təsirini nəzərə almırıq. Paramaqnit ionların yüksək konsentrasiyalarda mənzərəsi ciddi surətdə dəyişir. Bu halda lokal fluktasiya edən maqnit sahəsinin yaranmasında ionların arasındakı spin-spin qarşılıqlı təsiri əsas rol oynayır.

Burada əsas məqsəd maqnit zərrəciklərin spin-spin qarşılıqlı təsirinin nəzərə alınmasından ibarət olacaqdır. Məqsədimizə nail olmaq üçün sistemin Hamiltonianında:

$$H = H_0 + H_{int} \quad (1)$$

Qarşılıqlı təsir hissəsində (H_{int}) ionların H_{SS} operatorunu nəzərə almaqdır:

$$H_{SS} = - \sum_{i,i'} [a_{ii'} S_i^z S_{i'}^z + \frac{1}{2} b_{ii'} (S_i^+ S_{i'}^- + S_i^- S_{i'}^+)] \quad (1.1)$$

(1.1)-də $a_{ii'}$, $b_{ii'}$ elektron spin mübadilə və dipol-dipol əmsallarıdır.

Sistemin tam qarşılıqlı təsir Hamiltonianı H_{int} yüksək konsentrasiyalar halında aşağıdakı şəkildə olacaq:

$$H_{int} = H_{SI} + H_{SS} + H_{S\sigma} + H_{\sigma I} + H_{II} \quad (1.2)$$

Qeyd edək ki, burada $H_{SI}, H_{SS}, H_{S\sigma}, H_{\sigma I}, H_{II}$ uyğun olaraq elektron-nüvə, elektron-elektron, elektron-sərbəst elektron, sərbəst elektron-nüvə, nüvə-nüvə qarşılıqlı təsirlərinin hamiltonianlarıdır.

Sistemin qarşılıqlı təsirdə olmayan hissəsinin operatoru (H_0) dəyişməyərək aşağıdakı şəkildə qalır:

$$H_0 = H_S + H_I + H_\sigma + H_e + H_{ph} \quad (1.3)$$

Qeyd edək ki, burada $H_S, H_I, H_\sigma, H_e, H_{ph}$ uyğun olaraq qarşılıqlı təsirdə olmayan elektron, nüvə, sərbəst elektron spinlərinin, sərbəst elektronların kinetik enerjisinin, fonon sahəsinin hamiltonianlarıdır.

Nüvə Maqnit Rezonans əyrisinin formasını aşağı temperaturalar və konsentrasiyalar halında olduğu kimi Yarımmaqnit Yarımkeçirici maddələrdə uyğun gecikən Qrin funksiyasının xəyali hissəsi kimi tapmağa çalışacağıq:

$$F(m) = I_m \ll I^+ | I^- \gg_\omega^R \quad (1.4)$$

Burada I^\pm məlum nüvə spin operatorlarıdır.

Qrin funksiyası metoduna əsasən başlanğıcda antikommütator Qrin funksiyasını tapacağıq.

İlk olaraq aşağıdakı Qrin funksiyası üçün hərəkət tənliyi yazacağıq:

$$\ll I_e^+(t) | I_{e'}^-(t') \gg = i\theta(t - t') \ll [I_e^+(t), I_{e'}^-(t')]_+ \gg \quad (1.5)$$

Yuxarıdakı Qrin funksiyası zəncirvari şəkil alacaq:

$$E \ll I_e^+ | I_{e'}^- \gg = - \ll [I_e^+, I_{e'}^-] \gg + \ll [I_e^+, H] | I_{e'}^- \gg \quad (1.6)$$

(1.6) tənliyindən görürük ki, başlanğıc Qrin funksiyası $\ll I_e^+ | I_{e'}^- \gg$ daha yüksək rəqəmlə $\ll [I_e^+, H] | I_{e'}^- \gg$ Qrin funksiyasına zəncirvari bağlanmışdır.

(1.6) tənliyinin həlli, əgər sistemdə baş verən vacib dinamik effektləri itirməmək istəyiriksə mümkün qədər dəqiq aparılmalıdır. Yuxarıdakı tənliyi zorla kobud şəkildə həllindən uzaqlaşmaq üçün Qrin funksiyaları üçün həyəcanlaşma nəzəriyyəsinə tətbiq edirlər. Burada əsas məqsəd mümkün olduqca (1.6) tənliyindəki zənciri incə yolla qırmaq və bu yolla sistemdə mövcud olan qarşılıqlı təsirlərin dinamik proseslərdəki iştirakını ortaya çıxarmaqdır.

İlk baxışda (1.6) tənliyi aşağı temperaturalar və aşağı konsentrasiyalar üçün yazılmış tənliyə bənzəyir, ancaq unutmamaq lazımdır ki, buradakı sistemin Hamiltonianı H aşağı konsentrasiyalar halında fərqlənir. Bu fakt H -in aşkar şəklini (1.6) tənliyində yazanda ortaya çıxacaqdır.

Sistemin qarşılıqlı təsir Hamiltonianına daxil olan $H_{II}, H_{\sigma I}, H_{SI}, H_{S\sigma}$ hamiltonianlarının da aşkar şəklini yada salaq:

$$H_{II} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq j'} \left[\mathcal{E}_{jj'} I_j^z I_{j'}^z + \frac{1}{2} F_{ij} (I_j^- I_{j'}^+ + I_j^+ I_{j'}^-) \right] \quad (1.7)$$

$$H_{I\sigma} = -D \sum_k I_k^z G^z(R_k) \quad (1.8)$$

$$H_{S\sigma} = -B \sum_i \left\{ \sigma^z(R_i) S_i^z + \frac{1}{2} [\sigma^-(R_i) S_i^+ + \sigma^+(R_i) S_i^-] \right\} \quad (1.9)$$

$$H_{IS} = \frac{1}{2} \sum (C_{ij}^* I_j^- S_i^z + C_{ij} I_j^+ S_i^z + A_{ij} I_j^z S_i^z) \quad (1.10)$$

$B, D, F_{ij}, \mathcal{E}_{ij}, A_{ij}$ spinlər arasında qarşılıqlı təsir əmsallarıdır.

Antikommutator Qrin funksiyası $\ll I_e^+ | I_{e'}^- \gg$ üçün (1.1)-(1.10) ifadələrini nəzərə almaqla hərəkət tənliyini yazmaq:

$$\begin{aligned} (E - \omega_n) \ll I_e^+ | I_{e'}^- \gg &= \delta_{ee'} - \frac{1}{\hbar} \sum_i C_{ie}^* \ll I_e^z S_i^z | I_{e'}^- \gg + \\ + D \sum_i \ll I_e^+ \sigma^z(R_i) | I_{e'}^- \gg &+ \frac{1}{2\hbar} \sum_i A_{ie} \ll I_e^+ S_i^z | I_{e'}^- \gg + \\ &+ \frac{1}{\hbar} \sum_j \mathcal{E}_{je} \ll I_j^z I_e^+ | I_{e'}^- \gg \end{aligned} \quad (1.11)$$

Gözləndiyi kimi sistemdəki lokalizə olunmuş ionların yüksək konsentrasiyasını təmsil edən H_{SS} operatoru (1.11) tənliyində başlanğıc Qrin funksiyasına bağlanmadı. Həmin operatorun sistemin polyarizasiya operatorları (P) təyin olunan etapda Qrin funksiyaları zəncirinə bağlanacağı məlumdur. Hələlik sistemin kütlə operatorlarını təyin edən tənlikləri yazmaq:

$$M_1 = \left[\frac{1}{2\hbar} \sum_i A_{ie} \ll S_i^z I_e^+ | I_{e'}^- \gg \right] G^{-1} \quad (1.12)$$

$$M_2 = \left[-\frac{1}{\hbar} \sum_i C_{ie}^* \ll S_i^z I_e^z | I_{e'}^- \gg \right] G^{-1} \quad (1.13)$$

$$M_3 = \left[\frac{1}{\hbar} D \sum_i \ll I_e^+ \sigma^z(R_i) | I_{e'}^- \gg \right] G^{-1} \quad (1.14)$$

$$M_4 = \left[\frac{1}{\hbar} \sum_j \mathcal{E}_{je} \ll I_j^z I_e^+ | I_{e'}^- \gg \right] G^{-1} \quad (1.15)$$

Burada (1.12)-(1.15) tənliklərində:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = M(E) \quad (1.16)$$

$$G^{-1} = (\ll I_e^+ | I_{e'}^- \gg)^{-1} \quad (1.17)$$

$$M(E) = E - \omega_n - \delta_{ee'} \ll I_e^+ | I_{e'}^- \gg^{-1} \quad (1.18)$$

kimi təyin olunur.

Qrin funksiyası həyəcanlaşma nəzəriyyəsi texnikasına uyğun olaraq dinamik effektləri itirməmək üçün (1.12)-(1.15) tənliklərinin sağ tərəfindəki Qrin funksiyaları üçün yeni hərəkət tənliyi yazmalıyıq. Bu məqsədlə həmin Qrin funksiyalarını sistemin tam qarşılıqlı təsir Hamiltonianını diqqətə almaqla t' dəyişəninə görə diferensiallayırıq və sıfırıncı yaxınlaşmada sıfıra bərabər olan Qrin funksiyalarını ləğv edərək alırıq:

$$\begin{aligned} -(E - \omega_n) \ll S_i^z I_e^+ | I_{e'}^- \gg &= \langle S_i^z \rangle \delta_{ee'} - \frac{1}{2\hbar} \sum_i A_{ie'} \ll S_i^z I_e^+ | I_{e'}^- \gg - \\ - \frac{1}{\hbar} D \sum_i \ll I_e^+ S^z \sigma^z(R_i) | I_{e'}^- \sigma^z(R_{e'}) \gg &- \frac{1}{\hbar} \sum_j \mathcal{E}_{je'} \ll S_i^z I_e^+ | I_j^z I_{e'}^- \gg \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$-(E - \omega_n) \ll S_i^z I_e^z | I_{e'}^- \gg = \frac{1}{\hbar} \sum_{i'} \mathcal{E}_{i'e} \ll S_i^z I_e^z | S_{i'}^z I_{e'}^z \gg \quad (1.20)$$

$$-(E - \omega_n) \ll I_j^z I_e^+ | I_{e'}^- \gg = -\frac{1}{\hbar} \sum_{j'} \mathcal{E}_{j'e'} \ll I_j^z I_e^+ | I_{j'}^z I_{e'}^- \gg \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} -(E - \omega_n) \ll \sigma^z(R_e) I_e^+ | I_{e'}^- \gg &= \langle \sigma^z(R_e) \rangle \delta_{ee'} - \\ - \frac{1}{2\hbar} \sum_i A_{ie'} \ll \sigma^z(R_e) I_e^+ | S_i^z I_{e'}^- \gg &- \frac{1}{\hbar} D \sum_i \ll \sigma^z(R_i) I_e^+ | I_{e'}^- \sigma^z(R_{e'}) \gg \end{aligned} \quad (1.22)$$

Yuxarıdakı tənliklərin sağ tərəfində simmetriklənmiş sol tərəfindəkilərdən daha yüksək Qrin funksiyalarını kifayət qədər dəqiq hesablamaq üçün onlara hərəkət tənlikləri yazırıq:

$$\begin{aligned} (E - \omega_n) \ll S_i^z I_e^+ | S_{i'}^z I_{e'}^- \gg &= -\langle S_i^z S_{i'}^z \rangle \delta_{ee'} + \\ + \frac{1}{2\hbar} \sum_{i''} A_{i''e} \ll S_i^z S_{i'}^z I_e^+ | S_{i''}^z I_{e'}^- \gg &- \frac{1}{\hbar} \sum_{i''} C_{i''e}^* \ll S_i^z S_{i'}^z I_e^z | S_{i''}^z I_{e'}^+ \gg + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\hbar} \sum_i b_{mi} (\langle\langle S_i^+ S_m^- I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle - \langle\langle S_i^- S_m^+ I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle) + \\
& + \frac{1}{\hbar} \sum_j \mathcal{E}_{je} \langle\langle S_i^Z I_j^Z I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle + \frac{1}{\hbar} D \sum_i \langle\langle I_e^+ S_i^Z \sigma^Z(R_e) | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle + \\
& + \frac{1}{2\hbar} B [\langle\langle S_i^- \sigma^+(R_i) I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle - \langle\langle S_i^+ \sigma^-(R_i) I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle] \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Yuxarıda yazdığımız (1.23) tənliyindən görünür ki, Yarımmaqnit Yarımkəçiricilərdə paramaqnit zərrəciklərin konsentrasiyası yüksək olduğu halda həmin zərrəciklərin spin-spin qarşılıqlı təsiri (elektron) hərəkət tənliyi daxil olur (b_{mi} – lokal spinlərin qarşılıqlı təsir əmsalıdır). Bu fakt onu göstərir ki, rezonans əyrisinin formalaşmasında həmin qarşılıqlı təsir rol oynayacaqdır. Yüksək tərtibli Qrin funksiyalarını lazımi dəqiqliklə hesabladığımızda bütün qarşılıqlı təsirlərin oynadıqları rol ortaya çıxmalıdır. Bu məqsədlə (1.23) tənliyinin yətinərinə dəqiq həllini tapmaq üçün polyarizasiya operatorlarını daxil edək:

$$(E - \omega_n - P) G_1 = -\langle S_i^Z S_{i'}^Z \rangle \delta_{ee'} \quad (1.24)$$

Burada

$$G_1 = \langle\langle S_i^Z S_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle \quad (1.25)$$

$$P = P_D + P_B + P_b + P_c + P_{\mathcal{E}} + P_a \quad (1.26)$$

olarsa:

$$P_D = \frac{1}{\hbar} D \sum_i \langle\langle S_i^Z \sigma^Z(R_e) I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle G_1^{-1} \quad (1.27)$$

$$P_B = \frac{1}{2\hbar} B (\langle\langle S_i^- \sigma^+(R_i) I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle - \langle\langle S_i^+ \sigma^-(R_e) I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle) G_1^{-1} \quad (1.28)$$

$$P_a = \frac{1}{2\hbar} \sum_{i''} A_{i''e} \langle\langle S_i^Z S_{i''}^Z I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle G_1^{-1} \quad (1.29)$$

$$P_c = -\frac{1}{\hbar} \sum_{i''} C_{i''e}^* \langle\langle S_i^Z S_{i''}^Z I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle G_1^{-1} \quad (1.30)$$

$$P_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\hbar} \sum_j \mathcal{E}_{je} \langle\langle S_i^Z I_j^Z I_e^+ | S_{i'}^Z I_{e'}^- \rangle\rangle G_1^{-1} \quad (1.31)$$

$$P_b = \frac{1}{2\hbar} \sum_i b_{mi} (\langle\langle I_e^+ S_i^+ S_m^- | I_e^- S_{i'}^Z \rangle\rangle - \langle\langle I_e^+ S_i^- S_m^+ | I_e^- S_{i'}^Z \rangle\rangle) G_1^{-1} \quad (1.32)$$

Öncədən qeyd etmişdik ki, polyarizasiya operatorlarının aşkar ifadələri müstəqil maraq doğurur və buna görə onlar mümkün olan ən yüksək yaxınlaşmada əlavədə hesablanırlar.

Kütlə operatoru $M(E)$ -nin ifadəsinə daxil olan yüksək tərtibli Qrin funksiyalarını lazımi dəqiqlikdə hesablamaq üçün anoloji yoldan istifadə edəcəyik. Əgər

$$G_2 = \langle\langle S_i^Z I_e^+ | \sigma^Z(R_e) I_e^- \rangle\rangle \quad (1.33)$$

olduğunu hesab etsək və G_2 – ni t -yə görə diferensiallasaq aşağıdakı tənlikləri alarıq:

$$(E - \omega_n - P') G_2 = -\langle S_i^Z \rangle \langle \sigma^Z(R_e) \rangle \delta_{ee'} \quad (1.34)$$

$$P'_A = \frac{1}{2\hbar} \sum_{i'} A_{i'e} \langle\langle S_i^Z S_{i'}^Z I_e^+ | \sigma^Z(R_e) I_e^- \rangle\rangle G_2^{-1} \quad (1.35)$$

$$P'_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\hbar} \sum_j \mathcal{E}_{je} \langle\langle S_i^Z I_j^Z I_e^+ | \sigma^Z(R_e) I_e^- \rangle\rangle G_2^{-1} \quad (1.36)$$

$$P'_C = -\frac{1}{\hbar} \sum_i C_{i'e}^* \langle\langle S_{i'}^Z S_i^Z I_e^+ | \sigma^Z(R_e) I_e^- \rangle\rangle G_2^{-1} \quad (1.37)$$

$$P'_D = \frac{1}{\hbar} D \sum_i \langle\langle S_i^Z \sigma^Z(R_e) I_e^+ | \sigma^Z(R_e) I_e^- \rangle\rangle G_2^{-1} \quad (1.38)$$

Burada (1.34-tənliyindən) hesab olunur ki:

$$P' = P'_A + P'_\epsilon + P'_C + P'_D \quad (1.39)$$

Yuxarıda yazdığımız (1.34-1.38) tənlikləri imkan verir ki, öncə polyarizasiya operatorlarını və onların vasitəsilə sonra kütlə operatorlarını tapanaq. Kütlə operatorunun aşkar şəklinin tapılması başlanğıc hərəkət tənliyi yazdığımız əsas antikommütator Qrin funksiyasının aşkar şəklinin tapılması deməkdir. Sonrakı addımda gecikən Qrin funksiyasının aşkar şəklinin təyin edilməsi böyük çətinliklərə səbəb olmur. Burada əsas məsələ öncədən qeyd etdiyimiz kimi başlanğıc nüvə spin Qrin funksiyası $G = \ll I^+ | I^- \gg$ üçün yazılmış hərəkət tənliyinin sistemdə olan bütün qarşılıqlı təsirlərin düzgün nəzərə alınması ilə yazılması və lazımı qədər dəqiqliklə əmələ gəlmiş Qrin funksiyaları zəncirinin çözülməsidir.

Texniki olaraq bu məqsədlə (1.34) – (1.38) tənliklərinin sağ tərəflərindəki Qrin funksiyalarını yenidən t' -ə görə diferensiasillayaraq daha yüksək tərtibli simmetrik Qrin Funksiyaları alırıqlar. Alınmış simmetrik Qrin Funksiyalarını ilk yaxınlaşmada hesablayaraq polyarizasiya operatorunu tapırıql. Polyarizasiya operatorlarının tapılması $M(E)$ -nin tapılması və məsələnin yüksək dəqiqliklə həlli deməkdir.

Burada əsasən biz riyazi olaraq polyarizasiya operatoru P və kütlə operatoru M -ə yüksək konsentrasiyalarda (lokallaşmış paramaqnit ionların) H_{SS} qarşılıqlı təsirinin verdiyi payın hesablanmasını aparmışıql. P -yə və M -ə H_{SS} -in təsiri dolayı yolla Yarımmaqnit Yarımkeçiricilərdə rezonans əyrisinə göstərilən təsirlə nəticələnir.

Yarımmaqnit Yarımkeçiricilərdə aşağı temperaturlarda, yüksək konsentrasiyalarda sistemdə mövcud olan bütün mümkün qarşılıqlı təsirləri eyni zamanda nəzərə aldıqla polyarizasiya operatorlarının və kütlə operatorlarının aşkar ifadələri xeyli mürəkkəb alınırıqlar. Bu təbii olaraq kütlə operatorlarının və nəticədə Qrin Funksiyasının çox mürəkkəb ifadəsinə gətirib çıxarıql. Antikommutator Qrin Funksiyasının və rezonans əyrisinin formasını təyin edən gecikən Qrin Funksiyasının xəyali hissəsində ($f(\omega) = I_m \ll I^+ | I^- \gg_\omega^R$) kifayət qədər (ümumi halda) mürəkkəb şəkil alır.

Ümumi lokal fluktuasiya edən maqnit sahəsinin ixtiyari fluktasiyası halında rezonans əyrisinin eksperimental olaraq yaxşı məlum əyriyə bənzəməyən çox mürəkkəb bir ifadə ilə təsvir oluna biləcəyi əslində gözləniləndi. Bu halda yekun rezonans əyrisini bir çox əyriyənin kombinasiyasından yararın və təcrübələrdə müşahidə olunan rezonans əyriyərilə müqayisə olunması mümkün olmur. Aşağı temperaturlarda aparılan təcrübələr üçün əhəmiyyətli olan lokal sahənin sürətli və yavaş fluktuasiyalarında polyarizasiya, kütlə operatorlarının, gecikən Qrin Funksiyasının ifadələri sadələşir və nəticədə aşağıdakı nəticələri alırıql:

1. Lokal maqnit sahəsinin sürətli fluktuasiyasında rezonans əyrisinin forması.
2. Lokal maqnit sahəsinin yavaş fluktuasiyasında rezonans əyrisinin forması.

Birinci halda rezonans əyrisi üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$f(\omega) = A^2(\gamma_{SI} + \gamma_{\sigma S} + \gamma_{I\sigma} + \gamma_{IS} + \gamma_{II})^{-1} \times \\ \times \{\omega_a^2 + [A^2(\gamma_{SI} + \gamma_{\sigma S} + \gamma_{I\sigma} + \gamma_{IS} + \gamma_{II})^{-1}]^2\}^{-1} \quad (1.40)$$

(1.40) ifadəsində A ionların elektron spinlərinin nüvə spinlərilə qarşılıqlı təsir əmsalı

$$\gamma_{SI} = I_m P_{SI} \quad (1.41)$$

$$\gamma_{SS} = I_m P_{SS} \quad (1.42)$$

$$\gamma_{II} = I_m P_{II} \quad (1.43)$$

$$\gamma_{\sigma S} = I_m P_{\sigma S} \quad (1.44)$$

$$\gamma_{\sigma I} = I_m P_{\sigma I} \quad (1.45)$$

Yuxarıdakı (1.41)-(1.45) ifadələrindəki $\gamma_{SS}, \gamma_{II}, \gamma_{SI}, \gamma_{\sigma S}, \gamma_{\sigma I}$ kəmiyyətləri uyğun qarşılıqlı təsir nəticəsində baş verən spin keçidlərinin ehtimaldırlar.

Tapdığımız (1.33) ifadəsindən görürük ki, lokal sahənin sürətli fluktuasiyasında mürəkkəb rezonans əyrisi, yarım eni yarım intensivlikdə Δ olan Lorens əyrisinə çevrilir. Burada

$$\Delta = A^2(\gamma_{SI} + \gamma_{SS} + \gamma_{\sigma S} + \gamma_{II} + \gamma_{\sigma I})^{-1} \quad (1.46)$$

Qeyd etməliyik ki, lokal maqnit sahəsinin sürətli fluktuasiyalarında aşağıdakı şərt ödənilməlidir:

$$\gamma > A \quad (1.47)$$

$$\gamma = \gamma_{SI} + \gamma_{SS} + \gamma_{\sigma S} + \gamma_{II} + \gamma_{\sigma I} \quad (1.48)$$

(1.46) ifadəsindən görürük ki, (1.47) şərti ödənildikdə (lokal sahənin sürətli fluktuasiyalarında) Lorens əyrisi rezonans tezliyindən bir qədər sürüşmüşdür

$$\omega_{Sr} = \omega_n - \lambda \quad (1.48)$$

$$\lambda = \lambda_{SI} + \lambda_{SS} + \lambda_{\sigma S} + \lambda_{II} + \lambda_{\sigma I} \quad (1.49)$$

(1.49) münasibətindən görürük ki, yüksək konsentrasiyalı Yarımmaqnit Yarımkəçiricilərdə elektron spin-spin qarşılıqlı təsiri başqa qarşılıqlı təsirlərlə birlikdə xəttin enlənməsinə pay verdiyi kimi sürüşməsində də iştirak edir.

(1.49) ifadəsində λ cəm sürüşmə, $\lambda_{SS}, \lambda_{SI}, \lambda_{\sigma S}, \lambda_{\sigma I}, \lambda_{II}$ uyğun qarşılıqlı təsirlərin törətdikləri sürüşmələrdir.

(1.46) düsturu sürətlə fluktuasiyalarda Lorens əyrisinin yarım intensivlikdə eninə digər qarşılıqlı təsirlərlə birlikdə lokal spinlərin qarşılıqlı təsirinin də pay verdiyini görürük. Bu halda əsasən spin-nüvə qarşılıqlı təsirin genişləndirdiyi rezonans xəttinin, spin-spin qarşılıqlı təsirinin daraltmağa çalışdığını görürük.

Rezonans əyrisinin (Nüvə Maqnit Rezonansı) müşahidə edilə bilməsi üçün aşağıdakı şərt tələb olunur:

$$\Delta < \omega_{Sr} \quad (1.50)$$

(1.50) şərtinin ödənilməsi üçün rezonans təcrübələrinin kifayət qədər böyük sabit maqnit sahələrində aparılması lazımdır. Bugünkü texniki imkanlar (1.50) şərtinin ödənilməsini asanlıqla təmin edir.

Yarımaqnit Yarımkəçiricilərdə rezonans hadisəsi müşahidə edilən nü-

və spinləri üzərində yavaş fluktuasiyalarda (lokal maqnit sahəsinin):

$$A > \gamma \quad (1.51)$$

(1.51) şərti ödənildikdə rezonans əyrimiz aşağıdakı funksiya ilə təsvir olunur:

$$f(\omega) = \Delta_1 + \{\Delta_1^2 + (\omega_a - A)^2\}^{-1} \quad (1.52)$$

(1.52) ifadəsindən görünür ki, rezonans əyrimiz baş rezonans tezliyindən sürüşdürülmüş yarım eni Δ_1 olan Lorens əyrisidir:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} (\gamma_{IS} + \gamma_{SS} + \gamma_{\sigma S} + \gamma_{II} + \gamma_{\sigma I}) \quad (1.53)$$

Əldə etdiyimiz (1.53) düsturu göstərir ki, Yarımmaqnit Yarımkeçiricilərdə (1.51) şərti ödənildikdə sistemdə yeri olan qarşılıqlı təsirlər (o cümlədən yüksək konsentrasiyalarda lokal spinlərin qarşılıqlı təsiri) cəm olaraq rezonans əyrisinin genişlənməsində iştirak edir.

ƏDƏBİYYAT

1. Abragam A. The Principles of nuclear magnetism, 2006.
2. Furdyna J.K. Diluted magnetic semiconductors. J. Appl. Phys., 1988, v. 64, No 4, p. R29.
3. Тябликов С.В. Запаздывающие и опережающие функции Грина в теории ферромагнетизма. – Укр. мат. журн., 1959, т. II, с. 287-294.
4. Aliev M.N. Magnetic resonans theory in semimagnetic semiconductors. – Proc. of XXIV-th Congress AMPERE, L-40, Poznan, 1988.

РАСЧЕТ КРИВОЙ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ И ВЫСОКИХ КОНЦЕНТРАЦИЯХ ПАРАМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ В ПОЛУМАГНИТНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

А.С.МАММЕДЗАДЕ, М.Н.АЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

В статье был вычислен метод линейной функции Грина ядерного магнитного резонанса при низких температурах и высоких концентрациях парамагнитных частиц в полумагнитных полупроводниках. Рассмотрена форма резонансной кривой при быстрой флуктуации и медленной флуктуации локального магнитного поля.

Ключевые слова: Полумагнитных Полупроводниках, низких температурах, высокая концентрация, парамагнитный ион, резонансная линия, функции Грина.

CALCULATION OF NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE CURVE IN SEMIMAGNETIC SEMICONDUCTORS AT LOW TEMPERATURES AND HIGH CONCENTRATION OF PARAMAGNETIC PARTICLES

A.C.MAMMADZADE, M.N.ALIYEV

SUMMARY

In the article, the nuclear magnetic resonance line at low temperatures and high concentrations of paramagnetic particles in semimagnetic semiconductors was calculated by the Green function method. The shape of the resonance line in fast fluctuations and slow fluctuations of the local magnetic field was considered.

Keywords: Semimagnetic Semiconductors, low temperatures, high concentration, paramagnetic ion, resonance line, Green function

PACS: 03.65.-w, 03.65.Pm, 03.65.Ge, 03.65.Fd

KLEYN-QORDON TƏNLIYİNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ VUD-SAKSON POTENSİALI ÜÇÜN HƏLLİ

V.H.BƏDƏLOV

Fizika Problemləri İnstitutu, Bakı Dövlət Universiteti

badalovvatan@yahoo.com

İşdə ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün Pekeris yaxınlaşmasının köməyiylə radial Kleyn-Qordon tənliyinin analitik həlləri araşdırılmışdır. İxtiyari l - hali üçün Nikiforov-Uvarov metodundan istifadə etməklə enerjinin məxsusi qiymətləri və radial dalğa funksiyaları tapılmışdır. Həmçinin potensial çuxurun V_0 və W dərinliklərindən, radial n və orbital l kvant ədədlərindən və R_0 , a parametrlərindən asılı məhdud sayda enerji spektri müəyyən edilmişdir.

Açar sözlər: Kleyn-Qordon tənliyi, Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı, Pekeris yaxınlaşması

Nəzəri fizikanın və eləcə də kvant mexanikasının əsas məsələlərindən biri də bəzi fiziki maraq kəsb edən müəyyən tip potensiallar üçün dalğa tənliklərinin - Şredinger, Kleyn-Qordon və Dirak tənliklərinin analitik həll edilməsidir. Belə ki, dalğa tənliklərini həll edərək tapılan dalğa funksiyalarından kvant sistemləri haqqında mühüm məlumatları müəyyən etmək mümkündür. Bu nöqtəyi-nəzərdən dalğa tənliklərinin analitik həlli ciddi əhəmiyyət kəsb edir. Hal-hazırda yüksək texnologiyada - kvant nöqtələrinin alınması və onların idarə olunması nəzəri və tətbiqi fizikanın aktual və ən mühüm problemlərindəndir. Beləliklə, müxtəlif tip potensial sahələr üçün enerji spektri praktiki maraq kəsb etdiyindən ixtiyari parameterə nəzərən enerjinin məxsusi qiymətlərinin xassələrinin öyrənilməsi çox vacib və aktualdır.

Ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı həcmi (standart) Vuds - Sakson potensialı ilə səth Vuds-Sakson potensialının cəminə bərabərdir [1]:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{We^{\frac{r-R_0}{a}}}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2}, \quad (1)$$

burada V_0 , W potensial çuxurların dərinliyi, R_0 -potensialın eni və ya nüvənin radiusu, a - parametri isə səth təbəqəsinin qalınlığı və o, ionlaşma enerjisinin təcrübi qiyməti ilə müəyyən olunur. Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialında səth hissəsi əsasən səthə yaxın oblastda əlavə potensial çuxur yaradır ki, bu da

nüvə reaksiyalarında elastiki səpilmələrin izahında çox əhəmiyyətli yer tutur.

Vuds - Sakson tipli potensialları üçün orbital kvant ədədinin $l \neq 0$ ixtiyari qiymətində dalğa tənlikləri dəqiq həll oluna bilmir. Orbital kvant ədədinin $l \neq 0$ halında dalğa tənliklərinin təqribi analitik həllini tapmaq üçün bir neçə yaxınlaşma var ki, onlardan ən çox geniş istifadə ediləni Pekeris tərəfindən təklif olunan yaxınlaşmadır [2]. Pekeris yaxınlaşması mərkəzəqaçma potensialının nüvələr arası məsafəsindən asılı olub, ikinci tərtibə qədər hədləri nəzərə almaqla eksponensiallara görə sıraya ayrılmağa əsaslanır. İlk dəfə Pekeris yaxınlaşmasında Nikiforov-Uvarov metodunun köməyi ilə orbital kvant ədədinin ixtiyari $l \neq 0$ qiymətində Vuds - Sakson tipli potensiallar üçün radial Şredinger və radial Kleyn - Qordon tənlikləri analitik həll olunmuş, enerjinin məxsusi qiymətləri və məxsusi funksiyaları tapılmışdır [4-7]. Bu işlərdə ixtiyari l - halında $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialı üçün aşağıdakı aproksimasiya sxemi – Pekeris yaxınlaşması təklif edilmişdir:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{C_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \right). \quad (2)$$

Belə ki, [4, 5] işlərində R_0, a spesifik potensial parametrlərdən asılı olan C_0, C_1, C_2 kəmiyyətləri (2) münasibətinin hər iki tərəfini nüvənin səthi yaxınlığında - $r = R_0$ nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayırmaqla müqayisədən təyin olunan parametrlərdir. [6] və [7] – də isə uyğun olaraq ixtiyari l halında effektiv Vuds-Sakson və ümumiləşmiş Vuds - Sakson potensialının $r = r_e$ minimum nöqtəsi ətrafında müəyyən olunan C_0, C_1, C_2 aproksimasiya parametrləri əsasında $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialına (2) Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə Nikiforov - Uvarov və Supersimmetrik kvant mexanikası metodlarının köməyi ilə D - ölçülü radial Şredinger tənliyi analitik həll edilmişdir.

İşdə ümumiləşmiş Vuds - Sakson potensialı üçün radial Kleyn – Qordon tənliyini analitik həll edərək enerji spektri və dalğa funksiyası tapılmışdır. Hesablamalar ixtiyari l halında (1) ümumiləşmiş Vuds - Sakson potensialın $r = r_e$ minimum nöqtəsi ətrafında müəyyən olunan C_0, C_1, C_2 aproksimasiya parametrləri əsasında $V_l(r)$ mərkəzəqaçma potensialına (2) Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə Nikiforov-Uvarov metodunun köməyi ilə aparılmışdır.

Radial Kleyn-Qordon tənliyinin həlli

Sferik simmetrik skalyar $S(r)$ və vektor $V(r)$ potensial sahələrdə spini sifra bərabər olan zərrəcik üçün stasionar Kleyn-Qordon tənliyi aşağıdakı kimidir [8]:

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{\hbar^2 c^2} [(E - V(r))^2 - (Mc^2 + S(r))^2] \psi(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (3)$$

burada M – zərrəciyin kütləsi, r - radius, θ - polyar bucaq, φ - azimutal bucaq, \hbar - Plank sabiti, c – işığın sürətidir. Laplas operatoru

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{\nabla_{\theta, \varphi}^2}{r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \quad (4)$$

olduğundan (3) tənliyinin həlli sferik koordinat sistemində

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (5)$$

şəklində axtarılır. Verilmiş $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ sferik funksiyası üçün

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (6)$$

tənliyi ödənilir, burada l - orbital kvant ədədi və m isə maqnit kvant ədədidir.

(4) - (6) ifadələrini (3) tənliyində yerinə yazıb və müəyyən çevirmələrdən sonra $u(r)$ radial funksiya üçün aşağıdakı tənlik alınır:

$$\frac{d^2 u_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[(E - V(r))^2 - (Mc^2 + S(r))^2 - \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{r^2} \right] u_{nl}(r) = 0, \quad (7)$$

burada $0 \leq r < \infty$ - dir.

Skalyar və vektor potensialları ümumiləşmiş Vuds - Sakson potensialına bərabər $S(r) = V(r) = V_{GWS}(r)$ olduqda (7) tənliyi aşağıdakı şəkklə düşür:

$$\frac{d^2 u_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[E^2 - M^2 c^4 - 2(E + Mc^2)V(r) - \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{r^2} \right] u_{nl}(r) = 0, \quad (8)$$

Orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətində Nikiforov-Uvarov, asimptotik iterasiya və s. üsullardan istifadə etməklə bu potensial üçün (8) tənliyini analitik həll etmək mümkün deyildir və buna səbəb mərkəzəqaçma potensialıdır, yəni

$$V_l(r) = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{r^2}. \quad (9)$$

Bu məqsədlə yeni $x = \frac{r-R_0}{R_0}$ dəyişənini daxil edib $r = R_0(1+x)$ orbital mərkəzəqaçma $V_l(r)$ potensialını, ümumiləşmiş Vud-Sakson $V(r)$ potensialının $\frac{dv(r)}{dr} = 0$ ekstremum şərtindən alınan $e^{\frac{r-R_0}{a}} = e^{\alpha x} = \frac{W-V_0}{W+V_0}$ tənliyini ödəyən, yəni onu (1) ümumiləşmiş Vud-Sakson $V(r)$ potensialının $x = x_e \equiv x_{min} = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{W-V_0}{W+V_0} \right)$ minimum nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayıraq:

$$\begin{aligned} V_l(r) &= \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{r^2} = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{R_0^2} \frac{1}{(1+x)^2} = \\ &= \delta \left[\frac{1}{(1+x_e)^2} - \frac{2}{(1+x_e)^3} (x-x_e) + \frac{3}{(1+x_e)^3} (x-x_e)^2 + \dots \right] \quad (10) \end{aligned}$$

burada $\delta = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{R_0^2}$ -dir. Qeyd edək ki, $e^{\alpha x} = \frac{W-V_0}{W+V_0}$ münasibətinə əsasən $e^{\alpha x} > 0$ olduğundan $W > V_0$ və ya $W < -V_0$ alınır. Əgər bu şərt ödənməzsə, ümumiləşmiş Vud-Sakson $V(r)$ potensialının minimum nöqtəsi olmur. Pekeris aproksimasiyasına görə $V_l(r)$ potensialı aşağıdakı kimi götürülür [2, 4-6]:

$$\tilde{V}_l(r) = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{R_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1}{1+e^{\alpha x}} + \frac{C_2}{(1+e^{\alpha x})^2} \right), \quad (11)$$

burada $\alpha = R_0/a$ və $\delta = \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{R_0^2}$ -dir.

$\tilde{V}_l(r)$ potensialını $x = x_e = x_{min}$ ($r = r_e = r_{min}$) minimum nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayırıq:

$$\tilde{V}_l(r) = \delta \left\{ C_0 + \frac{C_1}{1 + e^{\alpha x_e}} + \frac{C_2}{(1 + e^{\alpha x_e})^2} - \left(\frac{\alpha C_1 e^{\alpha x_e}}{(1 + e^{\alpha x_e})^2} + \frac{2\alpha C_2 e^{\alpha x_e}}{(1 + e^{\alpha x_e})^3} \right) (x - x_e) \right. \\ \left. - \left(\frac{\alpha^2 C_1 e^{\alpha x_e} (1 - e^{\alpha x_e})}{2(1 + e^{\alpha x_e})^3} + \frac{\alpha^2 C_2 e^{\alpha x_e} (1 - 2e^{\alpha x_e})}{(1 + e^{\alpha x_e})^4} \right) (x - x_e)^2 + \dots \right\} \quad (12)$$

(10) və (12) ifadələrində x - in eyni tərtibli uyğun hədlərinin müqayisəsindən C_0, C_1, C_2 sabitlərinin təyini üçün aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} C_0 + \frac{C_1}{1 + e^{\alpha x_e}} + \frac{C_2}{(1 + e^{\alpha x_e})^2} = \frac{1}{(1 + x_e)^2} \\ \frac{\alpha C_1 e^{\alpha x_e}}{(1 + e^{\alpha x_e})^2} + \frac{2\alpha C_2 e^{\alpha x_e}}{(1 + e^{\alpha x_e})^3} = \frac{2}{(1 + x_e)^3} \\ \frac{\alpha^2 C_1 e^{\alpha x_e} (1 - e^{\alpha x_e})}{2(1 + e^{\alpha x_e})^3} + \frac{\alpha^2 C_2 e^{\alpha x_e} (1 - 2e^{\alpha x_e})}{(1 + e^{\alpha x_e})^4} = -\frac{3}{(1 + x_e)^3} \end{cases} \quad (13)$$

Bu cəbri tənliklər sistemini həll edərək - nəticədə C_0, C_1, C_2 sabitləri üçün aşağıdakı ifadələri tapırıq:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{(1 + x_e)^2} + \frac{(1 + e^{\alpha x_e})^2}{\alpha e^{\alpha x_e} (1 + x_e)^3} \left[\frac{e^{-\alpha x_e} - 3}{1 + e^{\alpha x_e}} + \frac{3e^{-\alpha x_e}}{\alpha(1 + x_e)} \right] \\ C_1 = \frac{2(1 + e^{\alpha x_e})^2}{\alpha e^{\alpha x_e} (1 + x_e)^3} \left[2 - e^{-\alpha x_e} - \frac{3(1 + e^{-\alpha x_e})}{\alpha(1 + x_e)} \right] \\ C_2 = \frac{(1 + e^{\alpha x_e})^3}{\alpha e^{\alpha x_e} (1 + x_e)^3} \left[e^{-\alpha x_e} - 1 + \frac{3(1 + e^{-\alpha x_e})}{\alpha(1 + x_e)} \right] \end{cases} \quad (14)$$

Radial Kleyn-Qordon tənliyinin (9) münasibətilə verilmiş $V_l(r)$ mərkəzəzəqəçmə potensialı üçün həll etmək əvəzinə Pekeris yaxınlaşmasından alınmış (11) münasibətilə təyin olunan $\tilde{V}_l(r)$ mərkəzəzəqəçmə potensialında yeni radial Kleyn-Qordon tənliyini həll edək. Beləliklə, Pekeris approksimasiyasına əsasən (8) tənliyində $V_l(r)$ yerinə $\tilde{V}_l(r)$ yazsaq, alırıq:

$$\frac{d^2 u_{nl}(r)}{dr^2} + \left[\frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{l(l+1)}{R_0^2} C_0 + \frac{2(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2} (V_0 + W) - \frac{l(l+1)}{R_0^2} C_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{\frac{2(E + Mc^2)W}{\hbar^2 c^2} + \frac{l(l+1)C_2}{R_0^2}}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \right] u_{nl}(r) = 0. \quad (15)$$

Yeni $z = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}}$; $0 \leq z \leq 1$ dəyişənini daxil etsək, (15) tənliyi

$$\frac{d^2 u_{nl}(z)}{dz^2} + \frac{1 - 2z}{z(1-z)} \frac{du_{nl}(z)}{dz} + \frac{-\varepsilon^2 + \beta^2 z - \gamma^2 z^2}{z^2(1-z)^2} u_{nl}(z) = 0, \quad (16)$$

şəklə düşər, burada

$$\varepsilon^2 = -\left(\frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{l(l+1)C_0}{R_0^2}\right) a^2 > 0, \quad (17)$$

$$\beta^2 = \left(\frac{2(E + Mc^2)(V_0 + W)}{\hbar^2 c^2} - \frac{l(l+1)C_1}{R_0^2}\right) a^2 > 0, \quad (18)$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{2(E + Mc^2)W}{\hbar^2 c^2} + \frac{l(l+1)C_2}{R_0^2}\right) a^2 > 0, \quad (19)$$

əlaqəli hallar üçün $\varepsilon > 0$ ($|E| \leq Mc^2$) olmalıdır.

Nikiforov-Uvarov metoduna [3] əsasən (16) tənliyindən

$$\sigma(z) = z(1-z); \quad \tilde{\tau}(z) = 1-2z; \quad \tilde{\sigma}(z) = -\varepsilon^2 + \beta^2 z - \gamma^2 z^2, \quad (20)$$

alınır. Belə ki, $\pi(z)$ funksiyası (20) və $\sigma'(z) = 1-2z$ əsasən

$$\pi(z) = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - (\beta^2 - k)z + (\gamma^2 - k)z^2} \quad (21)$$

olur. Sabit k parametri, kökaltı ifadənin tam kvadrata malik olması, yəni onun diskriminantının sıfıra bərabər olması şərtindən tapılır:

$$k = -\left(\varepsilon \mp \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2. \quad (22)$$

Beləliklə, hər bir k üçün iki mümkün $\pi(z)$ funksiyası vardır:

$$\pi(z) = \pm \begin{cases} \left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)z - \varepsilon & \text{gr } k = -\left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2 \\ \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)z - \varepsilon & \text{gr } k = -\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2 \end{cases} \quad (23)$$

NU metoduna [3] əsasən $\pi(z)$ polinomunun (23) dörd mümkün formasından eləsini seçirik ki, bu forma polinom üçün $\tau(z)$ funksiyasının törəməsi mənfidir:

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z) = -2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + 1\right)z + 2\varepsilon + 1;$$

$$\tau'(z) = -2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + 1\right) < 0$$

və kök $(0, 1)$ intervalında yerləşir, yəni $\tau'(z) < 0$, $0 \leq z \leq 1$. Buna görə $\pi(z)$ və $\tau(z)$ funksiyaları aşağıdakı formada olur:

$$\pi(z) = -\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)z + \varepsilon \quad (24)$$

$$\tau(z) = -2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + 1\right)z + 2\varepsilon + 1 \quad (25)$$

$$k = -\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2 \quad (26)$$

Onda $\lambda = k + \pi'(z)$ sabiti

$$\lambda = -\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2 - \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right) \quad (27)$$

olar. NU metoduna [3] əsasən λ_n - in digər alternativ təyininə görə

$$\lambda = \lambda_n = 2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)n + n(n+1) \quad (28)$$

olur. (27) və (28) münasibətlərin müqayisəsindən

$$\begin{aligned} & -\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)^2 + \gamma^2 - \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right) \\ & = 2\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}\right)n + n(n+1) \end{aligned}$$

alarıq:

$$\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} + n + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Yuxarıdakı münasibətdən

$$\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2} = n' \quad (29)$$

alınır, burada

$$n' = \frac{\sqrt{1 + 4\gamma^2} - 1}{2} - n \quad (30)$$

və n radial kvant ədədidir ($n = 0, 1, 2, \dots$). Beləliklə, (30) münasibətindən tapırıq:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(n' + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{n'} \right) \quad (31)$$

Əlaqəli halların $E < 0$ və dalğa funksiyasının sonlu olması $\varepsilon > 0, \varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2 > 0$ şərtlərindən $n' > 0$ və $|\beta^2 - \gamma^2| < n'^2$ alınır.

Uyğun olaraq ε, β və γ - nın (17)-(19) ifadələrini (31) – də yerinə yazıb müəyyən çevrilmələrdən sonra enerji spektrinin təyini üçün aşağıdakı enerji səviyyələri tənliyini alırıq:

$$E^2 - M^2 c^4 + V_0 E + M c^2 V_0 - \frac{\hbar^2 c^2 l(l+1)}{R_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1 + C_2}{2} \right) + \frac{\hbar^2 c^2}{16a^2} \left[\left(\sqrt{1 + \frac{8(E + M c^2)a^2 W}{\hbar^2 c^2} + \frac{4l(l+1)a^2 C_2}{R_0^2}} - 2n - 1 \right)^2 + \frac{16 \left(\frac{2(E + M c^2)a^2 V_0}{\hbar^2 c^2} - \frac{l(l+1)a^2(C_1 + C_2)}{R_0^2} \right)^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{8(E + M c^2)a^2 W}{\hbar^2 c^2} + \frac{4l(l+1)a^2 C_2}{R_0^2}} - 2n - 1 \right)^2} \right] = 0. \quad (32)$$

Bu irrasional tənlikdən potensialın V_0 və W dərinliklərindən, potensialın R_0 enindən, səthin a qalınlığından, radial n və orbital l kvant ədədlərindən asılı məhdud sayda enerji spektri tapılır.

Ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı sahəsində radial dalğa funksiyasını təyin etmək üçün $\sigma(z), \tau(z), \pi(z)$ funksiyalarının ifadələrini

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)} \quad \vee \quad \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} = \frac{\tau(z) - \sigma'(z)}{\sigma(z)}$$

tənliklərində nəzərə alaraq - birinci tərtib adi diferensial tənlikləri həll etsək,

(0, 1) intervalında sonlu $\varphi(z)$ və $\rho(z)$ funksiyalarını tapırıq:

$$\varphi(z) = z^\varepsilon (1-z)^{\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}}, \quad (33)$$

$$\rho(z) = z^{2\varepsilon} (1-z)^{2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}}. \quad (34)$$

Çəki funksiyasının aşkar şəkli və Rodrigues münasibətinə [3] əsasən radial dalğa funksiyasının ikinci hissəsi

$$y_n(z) = B_n z^{-2\varepsilon} (1-z)^{-2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}} \frac{d^n}{dz^n} \left[z^{n+2\varepsilon} (1-z)^{n+2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}} \right] \quad (35)$$

olar, burada $B_n = \frac{1}{n!}$ - normallaşma sabitidir [9]. Nəticədə, $y_n(z)$ funksiyasının Yakobi çoxhədlisi ilə verildiyi müəyyən olunur:

$$y_n(z) = P_n^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2})} (1-2z), \quad (36)$$

burada

$$P_n^{(\alpha, \beta)} (1-2z) = \frac{1}{n!} z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} \left[z^{n+\alpha} (1-z)^{n+\beta} \right] \quad (37)$$

Yakobi polinomudur. Beləliklə, radial dalğa funksiyası

$$u_{nl}(z) = C_{nl} z^\varepsilon (1-z)^{\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2}} P_n^{(2\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon^2 - \beta^2 + \gamma^2})} (1-2z) \quad (38)$$

olar, burada C_{nl} normalanma sabitidir.

Enerji səviyyələrinin (32) tənliyində qeyri-relyativistik limit halına ($c \rightarrow \infty$) keçsək, yəni $E - Mc^2 \rightarrow E$, $E + Mc^2 \rightarrow 2Mc^2$, $V_0 \rightarrow \frac{V_0}{2}$, $W \rightarrow \frac{W}{2}$ çevrilmələrini aparsaq, onda ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı üçün qeyri-relyativistik E_{nl} enerji spektrinin ifadəsi alınır [7]:

$$E_{nl} = -\frac{V_0}{2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2MR_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1 + C_2}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{32Ma^2} \left[\left(\sqrt{1 + \frac{8Ma^2W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2C_2}{R_0^2}} - 2n - 1 \right)^2 + \frac{16 \left(\frac{2Ma^2V_0}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)a^2(C_1 + C_2)}{R_0^2} \right)^2}{\left(\sqrt{1 + \frac{8Ma^2W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2C_2}{R_0^2}} - 2n - 1 \right)^2} \right] \quad (39)$$

Nəticə

Ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı sahəsində mərkəzəqaçma potensialına Pekeris yaxınlaşması sxemini tətbiq edərək orbital l kvant ədədinin ix-

tiyari qiymətində Nikiforov-Uvarov metodunun köməyi ilə Kleyn - Qordon tənliyinin əlaqəli hallarının enerjisinin məxsusi qiymətləri və uyğun məxsusi funksiyaların analitik ifadələri tapılmışdır. Belə ki, potensialın V_0 və W dərinliklərindən, radial n və orbital l kvant ədədlərindən, R_0, a parametrlərindən asılı məhdud sayda enerji spektri müəyyən edilmişdir. Həmçinin relyativistik enerji səviyyələri tənliyində $c \rightarrow \infty$ olduqda, yəni qeyri-relyativistik limit halında, ümumiləşmiş Vuds-Sakson potensialı üçün qeyri-relyativistik E_{nl} enerji spektrinin ifadəsi alınmışdır [7].

ƏDƏBİYYAT

1. R.D. Woods and D.S. Saxon, Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering, Physical Review, Vol. **95**, No. 2, pp. 577-578, 1954.
2. C.L. Pekeris, The rotation-vibration coupling in diatomic molecules, Physical Review, Vol. **45**, No. 2, pp. 98-103, 1934.
3. А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, Специальные функции математической физики, М.: Наука, 1984, 344 с.
4. V.H. Badalov, H.I. Ahmadov and A.I. Ahmadov, Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Woods - Saxon potentials for arbitrary l - state, International Journal of Modern Physics E, Vol. **18**, No. 3, pp. 631-641, 2009.
5. V.H. Badalov, H.I. Ahmadov and S.V. Badalov, Any l - state analytical solutions of the Klein – Gordon equation for the Woods - Saxon potential, International Journal of Modern Physics E, Vol. **19**, No. 7, pp. 1463-1475, 2010.
6. V.H. Badalov, The bound state solutions of the D - dimensional Schrödinger equation for the Woods - Saxon potential, International Journal of Modern Physics E, Vol. **25**, No. 1, 1650002/1-24, 2016.
7. V.H. Badalov, B. Baris, K. Uzun, Bound states of the D - dimensional Schrödinger equation for the generalized Woods - Saxon potential, Modern Physics Letters A, Vol. 34, No. 14, 1950107/1-20, 2019.
8. W. Greiner, Quantum Mechanics, Berlin, Springer, 2001, 512 p.
9. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, М.: Наука, том 2, 1974, 296 с.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА ВУДСА–САКСОНА

В.Г.БАДАЛОВ

РЕЗЮМЕ

В представленной работе были изучены аналитические решения радиального уравнения Клейна-Гордона для обобщенного потенциала Вудса-Саксона с помощью аппроксимация Пекериса. С использованием метода Никифорова-Уварова были найдены собственные значения энергии и волновой функции для произвольного l состояния. Также, были определены конечные числа энергетического спектра в зависимости от глубины потенциалов V_0 и W , радиального n и орбитального l квантовых чисел и параметров R_0, a .

Ключевые слова: Уравнения Клейна-Гордона, Обобщенный потенциал Вудса-Саксона, Связанные состояния

SOLUTION OF THE KLEYN-GORDON EQUATION FOR THE GENERALIZED WOODS-SAXON POTENTIAL

V.H.BADALOV

SUMMARY

In the present work, the analytical solutions of the radial Kleyn-Gordon equation have been studied for the generalized Woods-Saxon potential by using the Pekeris approximation. The energy eigenvalues and radial wavefunctions were found for arbitrary l - state via the Nikiforov-Uvarov methods. Furthermore, a finite number energy spectrum depending on depths of the potential V_0 and W , the radial n and the orbital l quantum numbers and parameters R_0, a was identified as well.

Keywords: Kleyn-Gordon equation, Generalized Woods-Saxon potential, Bound states

UOT 577.3

KAZOKSİN B MOLEKULUNUN NƏZƏRİ KONFORMASIYA ANALİZİ**L.N.AGAYEVA, Ş.N.HACIYEVA, N.F.ƏHMƏDOV, N.A.ƏHMƏDOV***Bakı Dövlət Universiteti, Fizika Fəhlemləri İnstitutu**leylanamig@mail.ru*

Nəzəri konformasiya analizi üsulu ilə Tyr1-Pro2-Tyr3-Tyr4 kazoksin B molekulunun fəza quruluşu onu əmələ gətirən aminturşu qalıqlarının aşağıenerjili konformasiyaları əsasında tədqiq olunmuşdur. Kazoksin B molekulunun fəza quruluşunu öyrənmək üçün sistemin potensial enerjisi qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin və hidrogen rabitəsi enerjisinin cəmi şəklində seçilmişdir. Kazoksin B molekulunun stabil konformasiyaları yığımları, onların ikiüzlü fırlanma bucaqlarının qiymətləri, onları stabilləşdirən aminturşu qalıqları arası və daxili qarşılıqlı təsir enerjiləri müəyyən edilmişdir. Göstərmişdir ki, bu molekulun üçölçülü fəza quruluşu 0- 5.0 kkal/mol enerji intervalına düşən 15 aşağıenerjili konformasiya ilə təəənnüm oluna bilər.

Açar sözlər: ekzorfin, kazoksin, opioid, fəza quruluşu, konformasiya

Qida maddələrindən alınmış bir sıra ekzogen peptidləri opioidəbənzər xassələrə malikdir. İlk dəfə elmə məlum olan ekzorfinlər α -kazeindən və buğda qlütenindən alınmışdır və müəyyən təsirləri öyrənilmişdir. Qida maddələrinin peptid komponentlərinin opioid aktivliyinə malik olmasının kəşfi belə fərziyyə irəli sürməyə əsas verdi ki, bəzi yeməklər mərkəzi əsəb sisteminə opiat dərmanlar kimi təsir göstərməyə qadirdir. Bəzi tədqiqatçılar fərz edirlər ki, insanlar tərəfindən süd və buğda məhsullarının çox istifadə edilməsi onların tərkibində ekzorfinlərin olması nəticəsində olmuşdur. Endogen opioid peptidlərinin və ekzorfinlərin aminturşu qalıqları ardıcılıqlarının müqayisəsi göstərir ki, ekzorfin molekulalarının N-tərəf aminturşu qalıqları daha rəngarəngdir. Bu onu göstərir ki, ekzorfinlər opiat reseptorlarının ixtisaslaşdırılmış liqandları deyil və onlar bəzi hallarda müxtəlif mediator və hormonlarla müxtəlif vəziyyətlərdə qarşılıqlı təsirlərdə ola bilərlər. Ekzorfinlərin N- tərəfində ən çox rast gəlinən Tyr-Pro ardıcılığıdır. Endogen opioid peptidlərinin N-tərəfində ən çox rast gəlinən Tyr-Gly-Gly-Phe ardıcılığıdır. Prolin aminturşu qalığının olması molekulu parçalanmaya qarşı daha davamlı edir. Heyvan mənşəli ekzorfinlər arasında ən çox tədqiq olunanı süd zülalının törəmələridir. Ən çox öyrənilənləri inək südünün β -kazeininin hidrolizindən alınan β -kazomorfin-4, -5, -6, -7 –dir [1-4].

Opioid peptidləri sinfinə aid olan enkefalinlərin, endorfinlərin, endomorfınların, dinorfinlərin, neoendorfinlərin quruluş-funksiya əlaqələrini tədqiq etmişik, indi isə ekzorfinlər sinfinə daxil olan molekulların quruluş-funksiya əlaqələri tədqiq olunur. Bu tədqiqat işi də əvvəlki tədqiqat işlərimizin davamıdır [5-11].

Hesablama metodu

Tyr1-Pro2-Tyr3-Tyr4 kazoksin B molekulu dörd aminturşu qalığından, 80 atomdan və 19 ikiüzlü fırlanma bucağından ibarətdir. Kazoksin B molekulunun fəza quruluşunu öyrənmək üçün sistemin potensial enerjisi qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin və hidrogen rabitəsi enerjisinin cəmi şəklində seçilmişdir. Qeyri-valent qarşılıqlı təsir enerjisi Lennard-Cons potensialı ilə Momani və Şeraqanın verdiyi parametrlərlə hesablanmışdır. Molekulun konformasiya imkanları su mühitində öyrənilmişdir. Hidrogen rabitəsinin enerjisi Morze potensialı ilə hesablanmışdır. Torsion qarşılıqlı təsir enerjisini hesablamaq üçün potensial funksiyalar, atomlardakı parsial yüklərin qiymətləri, valent bucaqlarının qiymətləri və valent rabitələrinin uzunluqları. Momani və Şeraqanın məqaləsindən götürülmüşdür. İkiüzlü fırlanma bucaqlarının işarələri və qiymətləri beynəlxalq nomenklaturaya uyğundur [12].

Nəzəri konformasiya analizi üsulunda hesablamaların nəticələrini təhlil etmək üçün hər bir aminturşu qalığının konformasiya halını xarakterizə etmək üçün X_{ij}^n işarəsindən istifadə edilir, burada X-aminturşu qalığının əsas zəncirinin formalarını (R,B,L,P), n-ardıcılıqda aminturşu qalığının neçənci yerdə durduğunu, $ij=11,12,13,21$ və s. simvolları aminturşu qalığının yan zəncirinin vəziyyətini (χ_1, χ_2, χ_3) xarakterizə edir. 1-indeksi ikiüzlü fırlanma bucağının qiymətinin $0^\circ-120^\circ$ intervalında, 2-indeksi $120^\circ-120^\circ$ intervalında, 3-indeksi $-120^\circ-0^\circ$ intervalında dəyişdiyini göstərir. Aminturşu qalığının əsas zəncirinin R-oblastında ikiüzlü fırlanma bucaqları φ və ψ -nin qiymətləri $-180^\circ-0^\circ$ intervalında; B-oblastında φ -nin qiyməti $-180^\circ-0^\circ$ intervalında, ψ -nin qiyməti $0^\circ-180^\circ$ intervalında; L-oblastında φ və ψ -nin qiymətləri $0^\circ-180^\circ$ intervalında; P-oblastında φ -nin qiyməti $0^\circ-180^\circ$ intervalında, ψ -nin qiyməti $-180^\circ-0^\circ$ intervalında dəyişir. Əsas zəncirin forma anlayışı aminturşu qalıqlarının əsas zəncirinin ikiüzlü fırlanma bucaqlarının qiymətlərinin R,B,L,P oblastlarına düşdüyünü müəyyən edir.

Molekulun əsas zənciri e və f şeypi adlanan simvollarla da xarakterizə olunur ki, bunlar da uyğun olaraq $C_i^\alpha-C_{i+1}^\alpha-C_{i+2}^\alpha-C_{i+3}^\alpha$ virtual rabitələrinin açılmış və bükülmüş konfigurasiyasına uyğun gəlir. f-şeypini dipeptid fraqmentin R-R, R-B, B-L, L-L, B-P, L-P, P-R, R-B formaları, e-şeypini isə B-B, B-R, L-B, L-P, R-L, R-P, P-L, P-P formaları əmələ gətirir.

Hesablamaların nəticələri və onların müzakirəsi

Tyr1-Pro2-Tyr3-Tyr4 kazoksin B molekulunun fəza quruluşu onu əmələ gətirən uyğun aminturşu qalıqlarının aşağıenerjili konformasiyaları əsasında hesablanmışdır. Məlumdur ki, molekulun aminturşu qalıqları ardıcılığında qli-

sindən başqa digər aminturşu qalıqları prolin aminturşu qalığından əvvəl gəl-dikdə onlar üçün əsas zəncirin R formasının konformasiyaları yüksəkenerjili olur. Ona görə də kazoksin B molekulunun fəza quruluşunu hesablamaq üçün başlanğıc variantlar seçildikdə Tyr1 aminturşu qalığı üçün əsas zəncirin R formasının konformasiyalarına baxılmamışdır. Bu səbəbdən də molekulun fəza quruluşunu öyrənmək üçün başlanğıc variantlar peptid zəncirin eee, eef, efe və eff şeyplərinin əsas zəncirlərinin səkkiz formalarının konformasiyaları əsasında seçilmişdir.

Kazoksin B molekulunun fəza quruluşunun öyrənilməsi göstərir ki, əsas zəncirin formalarının və konformasiyaların enerjilərinə görə diferensiasiya gədir. Hesablanmış bir neçə yüz konformasiyalardan yalnız on beşinin nisbi enerjisi 5.0 kkal/mol-dan kiçik olmuşdur. Həmin konformasiyalar, onlara qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin verdikləri pay, ümumi və nisbi enerjiləri cədvəl 1-də göstərilmişdir. Cədvəl 1-dən görüldüyü kimi, qeyri-valent qarşılıqlı təsir enerjisinin ümumi enerjiyə verdiyi pay (-14.4) – (-10.0) kkal/mol, elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjisinin verdiyi pay (-2.2) – (-1.0) kkal/mol, torsion qarşılıqlı təsir enerjisinin verdiyi pay (1.3) - (2.9) kkal/mol intervalında olmuşdur.

Cədvəl 1

Kazoksin B molekulunun aşağıenerjili konformasiyaları, onlara qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin verdikləri pay, ümumi və nisbi enerjiləri

№	Şeyp	Konformasiya	U_{qv}	U_{el}	U_{tor}	$U_{üm}$	U_{nis}
1	Eff	$B_3 R R_2 R_3$	-14.4	-2.0	1.8	-14.6	0
2		$B_3 R R_1 R_2$	-13.3	-2.0	1.6	-13.7	0.9
3		$B_3 R R_3 R_3$	-12.9	-2.2	1.6	-13.5	1.1
4		$B_3 R R_3 R_2$	-11.5	-2.2	1.4	-12.2	1.3
5		$B_3 R R_2 R_2$	-10.6	-2.1	1.5	-11.2	3.4
6		$B_3 R R_3 R_1$	-10.0	-1.5	1.3	-10.2	4.4
7	Efe	$B_3 R B_1 B_3$	-13.5	-0.4	2.8	-11.1	3.5
8		$B_3 R B_3 B_3$	-11.9	-0.5	1.8	-10.6	4.0
9		$B_3 R B_1 B_2$	-12.7	-0.4	2.9	-10.3	4.3
10		$B_3 R B_2 B_3$	-11.8	-0.4	2.0	-10.2	4.4
11		$B_3 R B_1 B_1$	-11.9	-0.5	2.6	-9.9	4.7
12	Eef	$B_2 B R_1 R_1$	-14.1	1.0	2.4	-10.7	3.9
13		$B_1 B R_2 R_3$	-12.4	0.7	1.8	-9.8	4.8
14	Eee	$B_1 B B_1 B_3$	-12.5	0.4	1.8	-10.3	4.3
15		$B_1 B B_2 B_3$	-12.3	0.7	1.8	-9.8	4.8

Kazoksin B molekulunun hər bir şeypinin ən aşağıenerjili konformasiyalarında aminturşu qalıqları daxilində və arasında qarşılıqlı təsir enerjiləri cədvəl 2-də, onların həndəsi parametrləri isə cədvəl 3-də, həmin konformasiyalarda atomların fəzada yerləşməsi isə şəkil 1-də göstərilmişdir.

0 - 5.0 kkal/mol enerji intervalına eff şeypinin altı konformasiyası, efe

şeypinin beş konformasiyası, eef və eee şeyplərinin iki konformasiyası düşür. eef şeypinin altı konformasiyasından dördünün nisbi enerjisi 1.3 kkal/mol-dan kiçikdir. Kazoksin B molekulunun ən stabil konformasiyası eff şeypinin B₃ R R₂ R₃ konformasiyasıdır. Bu konformasiya qeyri-valent və elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjilərinə görə əlverişlidir, qeyri-valent qarşılıqlı təsir enerjisinin verdiyi pay isə ən çoxdur (cədvəl 1). Konformasiyanın stabilləşməsinə Tyr1-in digər aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-16.4) kkal/mol, Tyr3-Tyr4 aminturşu qalıqları arasındakı qarşılıqlı təsir enerjisi (-4.7) kkal/mol pay verir (cədvəl 2). Bu konformasiyada Tyr1 aminturşu qalığının N-H atomu ilə Tyr4 aminturşu qalığının C=O atomu arasında hidrogen rabitəsi yaranır. Cədvəl 1-də göstərilən efe şeypinin beş konformasiyasının nisbi enerjisi 3.5 – 4.7 kkal/mol enerji intervalında dəyişir. Bu şeypin ən stabil konformasiyası nisbi enerjisi 3.5 kkal/mol olan B₃ R B₁ B₃ -dir. Bu konformasiyada qeyri-valent qarşılıqlı təsir enerjisinin ümumi enerjiyə verdiyi pay qlobal konformasiyadakına nisbətən (0.9) kkal/mol qədər, elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjisinin verdiyi pay (1.6) kkal/mol qədər, torsion qarşılıqlı təsir enerjisinin verdiyi pay (1.0) kkal/mol qədər azdır. Konformasiyanın stabilləşməsinə Tyr1-in digər aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-16.1) kkal/mol, Pro2-nin Tyr3-Tyr4 aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-2.5) kkal/mol, Tyr3-Tyr4 aminturşu qalıqları arasındakı qarşılıqlı təsir enerjisi (-2.0) kkal/mol pay verir (cədvəl 2). eef şeypinin yalnız iki konformasiyasının nisbi enerjisi (5.0) kkal/mol-dan kiçikdir. Şeypin ən stabil konformasiyası B₂ B R₁ R₁-dir, onun nisbi enerjisi 3.9 kkal/mol-dur. Bu konformasiya qeyri-valent qarşılıqlı təsire görə yalnız qlobal konformasiyadan 0.3 kkal/mol qədər geri qalır, elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjisinə görə ən əlverişsizdir (cədvəl 1). Konformasiyanın stabilləşməsinə Tyr1-in digər aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-10.6) kkal/mol, Pro2-nin Tyr3-Tyr4 aminturşu qalıqları ilə qarşılıqlı təsir enerjisi (-5.2) kkal/mol, Tyr3-Tyr4 aminturşu qalıqları arasındakı qarşılıqlı təsir enerjisi (-3.7) kkal/mol pay verir (cədvəl 2). eee şeypinin yalnız iki konformasiyasının nisbi enerjisi (5.0) kkal/mol-dan kiçikdir. Şeypin ən stabil konformasiyası B₁ B R₁ R₃-dür, onun nisbi enerjisi 4.3 kkal/mol-dur. Bu konformasiya yalnız di- və tripeptid qarşılıqlı təsir enerjiləri hesabına stabilləşir.

Cədvəl 2

Kazoksin B molekulunun aşağıenerjili B₃ R R₂ R₃ (U_{nis}=0 kkal/mol, 1-ci sətr), B₃ R B₁ B₃ (U_{nis}=3.5 kkal/mol, 2-ci sətr), B₂ B R₁ R₁ (U_{nis}=3.9 kkal/mol, 3-cü sətr), B₁ B B₁ B₃ (U_{nis}=4.3 kkal/mol, 4-cü sətr)

konformasiyalarında aminturşu qalıqları daxilində və arasında qarşılıqlı təsir enerjiləri

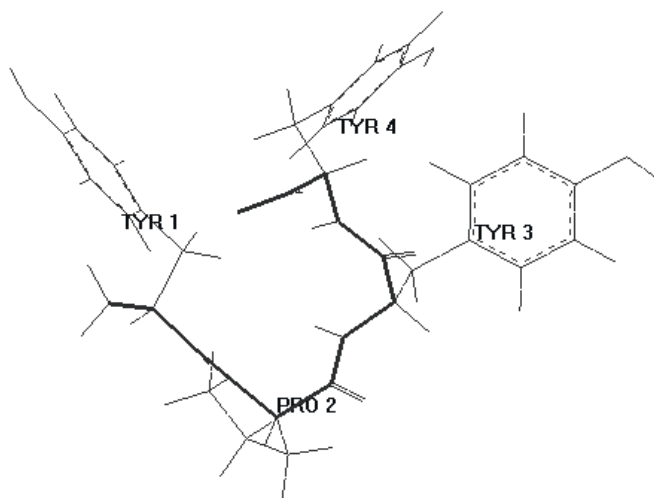
Tyr1	Pro2	Tyr3	Tyr4	
3.0	-3.8	-2.1	-10.5	Tyr1
2.9	-3.9	-8.6	-3.6	
1.9	-5.3	-1.6	-3.6	
1.7	-4.9	-4.6	-2.4	
	0.2	-0.5	-0.7	Pro2
	0.2	-1.5	-1.0	
	0.4	-0.3	-4.9	
	0.7	-0.2	-2.8	
		0.9	-4.7	Tyr3
		1.8	-2.0	
		1.4	-3.7	
		1.4	-2.4	
			1.8	Tyr4
			1.7	
			2.5	
			1.3	

Cədvəl 3

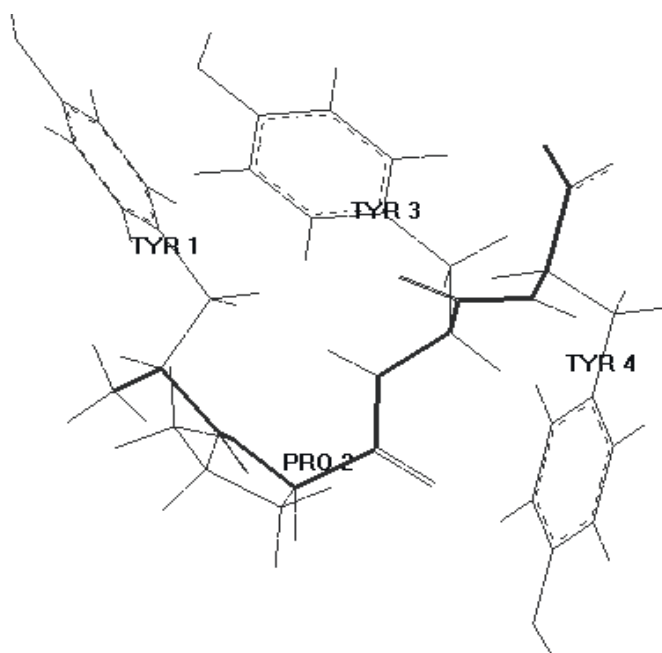
Kazoksin B molekulunun aşağıenerjili konformasiyalarının həndəsi parametrləri

Amin turşusu	B ₃ R R ₂ R ₃	B ₃ R B ₁ B ₃	B ₂ B R ₁ R ₁	B ₁ B B ₁ B ₃
Tyr1	-81 156 176 -70 103 0	-82 145 169 -77 112 0	-66 124 178 177 76 0	-69 159 173 66 90 0
Pro2	-60 -42 180	-60 -41 177	-60 142 179	-60 97 180
Tyr3	-85 -55 -176 - 173 94 0	-86 142 -179 63 83 0	-61 -36 176 65 83 0	-95 149 180 67 84 0
Tyr4	-89 -62 - -57 94 0	-94 140 - -60 91 0	-80 -32 - 60 81 0	-133 140 - -57 91 0
U _{nis}	0	3.5	3.9	4.3

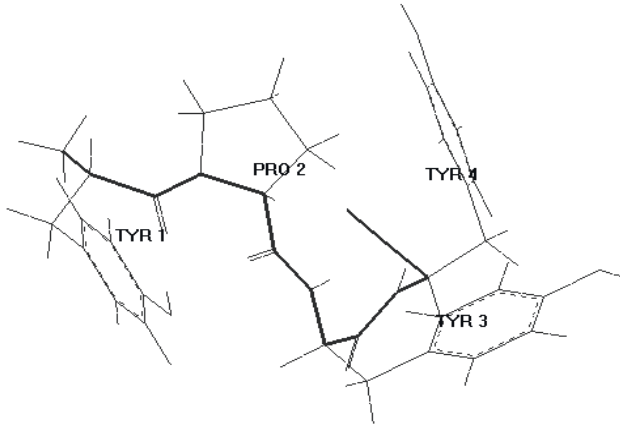
Qeyd: ikiüzlü fırlanma bucaqlarının qiymətləri $\phi, \psi, \omega, \chi_1, \chi_2, \dots$ ardıcılığı ilə verilmişdir.



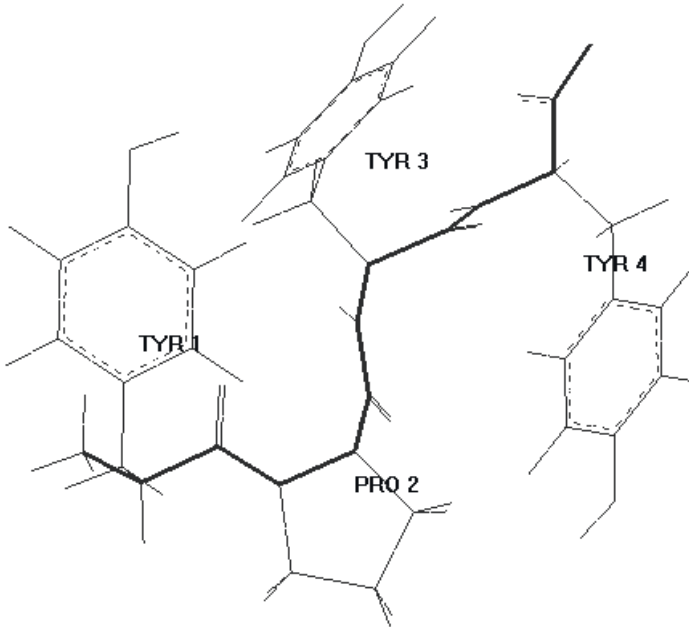
a) $B_3 R R_2 R_3$



b) $B_3 R B_1 B_3$



c) B₂ B R₁ R₁



d) B₁ B B₁ B₃

Şək. 1. Kazoksin B molekulunun aşağıenerjili konformasiyaları

Kazoksin B molekulunun fəza quruluşunun öyrənilməsi göstərir ki, molekullar elə fəza quruluşları yığılmasına malik olurlar ki, o müxtəlif bioloji funksiyaları yerinə yetirə bilər və müxtəlif reseptor molekulları ilə əlaqəyə girə bilər. Kazoksin B molekulunun fəza quruluşunun öyrənilməsindən alınan nəticələr kazoksin A, C molekullarının fəza quruluşlarının tədqiqində istifadə oluna bilər.

ӘДӘБИҲАТ

1. Чеснокова Е.А., Сарычева Н.Ю., Дубынин В.А., Каменский А.А. Опиоидные пептиды, получаемые с пищей и их влияние на нервную систему. *Успехи физиологических наук*, 2015, т. 46, №1, с. 22-46.
2. Дубынин В.А. Экзорфины: возможное биологическое и клиническое значение. *Психиатрия*. 2010, т. 45. №3, с. 65-73.
3. Дубынин В.А., Ивлева Ю.А., Каменский А.А. Нейротропная активность опиоидных пептидов пищевого происхождения β-казоморфинов. *Успехи физиологических наук*, 2004, т. 35, №1, с. 83-101.
4. Siennkiewicz-Szlapka E., Jarmolowska B., Krawczuk S., Kostyara E. Contents of agonistic and antagonistic opioid peptides in different cheese varieties. *Int.Dairy J.* 2009, v. 19, №4, p. 258-263.
5. Ахмедов Н.А. Теоретический конформационный анализ молекул β-казоморфина, валмуцептина и морфицептина. *Молекулярная Биология*, 1989, т. 23, с. 240-248.
6. Ахмедов Н.А., Годжаев Н.М., Сулейманова Е.В., Попов Е.М. Структурная организация молекул [Met] энкефалина и эндорфинов. *Биоорганическая химия*, 1990, т. 16, с. 649-667.
7. Akhmedov N.A., Agayeva L.N., Ismailova L.I., Godjaev N.M. The spatial structure of the cardio active peptides. *Current Topics in Peptide and Protein Research*. 2010, v. 11, p. 87-93.
8. Гаджиева Ш.Н., Ахмедов Н.А., Масимов Э.А., Годжаев Н.М. Пространственная структура молекулы Thr-Pro-Ala-Glu-Asp-Phe-Met-Arg-Phe-NH₂, *Биофизика*, 2013, т. 58, вып. 4, с. 587-590.
9. Akhmedov N.A., Ismailova L.I., Abbasli R.M. et al. Spatial Structure of Octarphin molecule. *IOSR.J.Applied Physics(IOSR-JAP)*. 2016, v .8,p. 66-70.
10. Hasanov E.M., Akhmedov N.A. Spatial Structure of Peptide BAM-20P. *International Journal of Innovative Science and Research Technology ISSN: 24,№ 2156-2165*, 2018, v. 3, p. 72-76.
11. Akhmedov N.A., Abbasli R.M., Agayeva L.N., Ismailova L.I. Three-dimensional structure of exorpin B5 molecule. *Conference proceedings Modern Trends In Physics*. 2019, p. 201-204.
12. IUPAC-IUB. *Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry*, Blackwell Scientific, Oxford, 1993.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КОНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ МОЛЕКУЛЫ КАЗОКСИНА В

Л.Н.АГАЕВА, Ш.Н.ГАДЖИЕВА, Н.Ф.АХМЕДОВ, Н.А.АХМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Методом теоретического конформационного анализа исследована пространственная структура молекулы казоксина В- Tyr1-Pro2-Tyr3-Tyr4. Потенциальная функция системы выбрана в виде суммы невалентных, электростатических и торсионных взаимодействий и энергии водородных связей. Найдены низкоэнергетические конформации молекулы, значения двугранных углов основных и боковых цепей аминокислотных остатков, входящих в состав молекулы, оценена энергия внутри- и межостаточных взаимодействий. Было показано, что трехмерная структура этой молекулы может быть представлена 15 низкоэнергетическими конформациями, попадающими в энергетический интервал 0-5,0 ккал/моль.

Ключевые слова: экзорфин, казоксин, опиоид, структура, конформация

THEORETICAL CONFORMATIONAL ANALYSIS CASOXIN B MOLECULES

L.N.AGAYEVA, Şh.N.GADJİYEVA, N.F.AKHMEDOV, N.A.AKHMEDOV

SUMMARY

By the method of theoretical conformational analysis, the spatial structure of the casoxin B- Tyr1-Pro2-Tyr3-Tyr4 molecule was investigated. The potential function of the system is chosen as the sum of non-valent, electrostatic and torsion interactions and the energy of hydrogen bonds. Low-energy conformations of the molecule, values of dihedral angles of the main and side chains of amino acid residues included in the molecule were found, the energy of intra- and interstate interactions was estimated. It has been shown that the three-dimensional structure of this molecule can be represented by 15 low-energy conformations falling within the energy range of 0-5.0 kcal/mol.

Keywords: exorphine, casoxin, opioid, structure, conformation

UOT 539.958**NANOQURULUŞLU p-Si/n-ZnSSe HETEROKEÇİDİNİN
ELEKTRİK XASSƏLƏRİ****E.F.NƏSİROV***elshannasirov@bsu.edu.az****Bakı Dövlət Universiteti, Fizika Problemləri İnstitutu***

Heterokeçiddə cərəyankeçmə mexanizmini öyrənmək üçün onun elektrik xassələri 80K-400K ölçmə temperaturu intervalında tədqiq olunmuşdur. p-Si/n-ZnSSe heterokeçidinin düzünə istiqamətdə I-V xarakteristikası tədqiq edilmiş, Çenq metodundan istifadə etməklə ardıcıl müqavimətin (R_a) qiyməti hesablanmış, $dV/d(\ln I)$ nin I-dən və $H(I)$ nin I-dən asılılığı qurulmuş, p-Si/n-ZnSSe heterokeçidinin energetik zona quruluşu Anderson modeli ilə təsvir olunmuşdur.

Açar sözlər: Heterokeçid, cərəyankeçmə mexanizmi, VAX, VFX.

Yüksək müqavimətli və enli zolaqlı xalkogenid yarımkəçiricilərin fizikası, texnologiyası və texnikası üzrə tədqiqatlar bu maddələrin işıq mənbələri, işıq qəbulediciləri, qeyri-xətti optik çeviricilər, elektrofotografik təbəqələr və s. yaratmaq üçün perspektivli olmaları müəyyən edilmişdir.

Enli zolaqlı təbəqələrə daxil edilmiş yarımkəçirici atom mərkəzləri üçün rezonans tunel effektindən istifadə olunması bu cihazların xarakteristikalarını əhəmiyyətli dərəcədə dəyişəcəkdir. Bu baxımdan bu materiallar əsasında iki və çoxlaylı heterokeçidlərinin təbəqələrin qalınlığının kiçildilməsi, yeni nanoquruluşlu təbəqələrdə baş verən proseslərin və keçid sərhədindəki defektlərin öyrənilməsi və idarə olunması çox aktualdır. Heterostrukturlar bahalı, mürəkkəb kimyəvi və texnoloji cihazlar olsa da daha effektiv hesab olunur. Müasir elektronika heterokeçidlərdən istifadə olunmasına əsaslanır. Sürətli mikro- və nanoelektronika heterokeçidlər əsasında reallaşacaq. Heterokeçidlər günəş enerjisinin çevrilməsində bahalı element və ən ucuz elektrik enerjisi istehsalçısıdır [1, 2].

Sink selen (ZnSe) II-VI qrup birləşməsi olan düzgonalı ($E_g=2,7$ eV) yarımkəçirici material kimi optoelektron sensorlarında və heterokeçidli günəş elementlərində geniş tətbiq imkanları var. Ondan işıq diodları və fotodiodlar üçün qoruyucu və işıqlandırıcı örtük kimi istifadə olunur. Si və ZnSe materiallarının əsasında heterokeçid hazırlanması perspektivli sayılır. Lakin qəfəs parametrləri, istidən genişlənmə əmsalı, ionluq dərəcəsi kimi fiziki parametrlərdəki

fərqlər müxtəlif növ krastillik defektlər yaradır ki, bu da heteroqeçidin optik və elektron xassələrinə ziyanlı təsir göstərərək onların istismar müddətinin azalmasına səbəb olur [3, 4]. ZnSe-nin optoelektronikaya tam qoşulması üçün, onun Si-əsaslı mikroelektronikaya inteqrasiya olunmasına maksimum səy göstərmək lazımdır. Bu cür səylər əsasən Si/ZnSSe heteroqeçidinin alınmasının fiziki və texnoloji əsaslarının öyrənilməsinə yönəlir. Heteroqeçiddə cərəyankeçmə mexanizmini öyrənmək üçün onun elektrofiziki xassələri geniş intervalda tədqiq olunmuşdur.

Eksperiment

Tədqiq edilmiş heterostruktur "sendviç" quruluşuna malikdir. Onların hazırlanması zamanı altlıq (katod) qismində $0,4 \pm 0,5$ mm qalınlıqlı və (100) simmetriya oxuna malik monokristallik Si lövhələrindən istifadə edilmişdir. p-Si-un xüsusi müqaviməti müvafiq olaraq 8 ± 20 Om·sm-ə bərabər olmuşdur. Anod materialı kimi molibden lövhəsindən istifadə edilmişdir. Müxtəlif mexaniki defektlərin, nazik oksid təbəqələrinin və başqa çirklənmələrin kənarlaşdırılması məqsədilə silisium altlıqlar əvvəlcə HCl-da, daha sonra isə KOH + KNO (1:3) qarışığında $250-500$ °C temperaturda, işçi məhlula salınmazdan əvvəl qabaqcadan təyin edilmiş rejimə uyğun olaraq aşındırılmışdır.

Elektrokimyəvi çökdürülmə prosesi bizim tərəfimizdən otaq temperaturunda xüsusi kvars qabda silisium lövhələrinin üzərində yerinə yetirilmişdir. kimyəvi məhlulun optimal tərkibi aşağıdakı kimi seçilmişdir: $1:12:500$ ($1,5 \pm 2,2 \times 10^{-3}$ M $Zn(CH_3OOO)_2$, $1,5 \pm 2 \times 10^{-3}$ M SeO_2 , $0,01 \pm 0,02$ M $Na_2S_2O_3$, $1,05$ M NH_4OH). Alınmış nazik təbəqələrin tərkibi $0 \leq x \leq 0,5$ diapazonunda dəyişir və ona kimyəvi, termik və rentgen analizləri ilə nəzarət edilir. Müxtəlif nümunələr üçün onların qalınlığı 2 μm-ə bərabərdir. Nazik təbəqələr n-tip keçiricilik qabiliyyətinə malikdir; bu, termo-e.h.q.-nin işarəsinə görə müəyyən edilmişdir.

Nazik təbəqələrin struktur xarakteristikaları Rigaku D/Max-IIIc rentgen difraktometrindən istifadə edilməklə 20 ± 70 skanlama bucağı diapazonunda müəyyən olunmuşdur. Səthin morfolojiyası, nümunənin stexiometriyasının keyfiyyət ölçmələri skanlayıcı elektron mikroskopunun köməyi ilə müəyyən edilmişdir. Nazik təbəqənin strukturu haqqında informasiyanın alınması üçün Rentgen şüalarının difraksiyasının (XRD) şəkilləri təhlil edilmişdir. $Cd_{1-x}Zn_xS$ nazik təbəqəsinin struktur analizi rentgen difraktometrinin köməyi ilə 20 ± 70 skanlama bucağı diapazonunda aparılmışdır. Müəyyən edilmişdir ki, $Cd_{1-x}Zn_xS$ nazik təbəqələri polikristal təbiətə malikdir və RD tədqiqatlarından tapıldığı kimi, güclü sürətdə üstün olaraq (002) müstəvisi boyunca heksaqonal kristal quruluşunda böyüyür.

$80K-400K$ ölçmə temperaturu intervalında strukturun voltamper xarakteristikası şəkil 1-də göstərilmişdir. Bu xarakteristikalar ailəsi göstərir ki, P-Si altlığı ilə n- ZnSSe təbəqəsi arasında heteroqeçid formalaşmışdır. Termoelek-

tron emissiyası (TE) nəzəriyyəsinə görə düzünə cərəyanın gərginlikdən asılılığı [5]

$$I = I_s \left[\frac{\exp(qV_d)}{nkt} - 1 \right] \quad (1)$$

tənliyi ilə ifadə olunur. Burada

$$I_s = A_{eff} A^{**} T^2 \exp(-q\phi_B/kT) \quad (2)$$

Düsturlarda q - elektronun yükü, n - qeyri ideallıq əmsalı, k – Bolsman sabiti, T – mütləq temperatur, I_s - doyma cərəyanı, A - en kəsiyin sahəsi, A^{*} - Riçardson sabiti, ϕ_B - potensial çəpərin hündürlüyüdür. n - qeyri ideallıq əmsalı cərəyanın ifadəsindən belə təyin olunur:

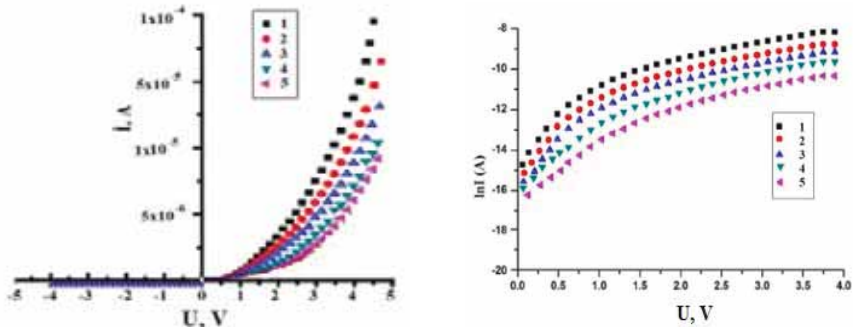
$$n = (q/kT) [dV/d(\ln I), V_d = V - IR, I = I_s \exp[q(V - IR)/nkT]$$

$$V = RA_{eff} J + n\phi_B + (n/\beta) \ln(J/A^{**}T^2) \quad \beta = q/kT.$$

$$\frac{d(V)}{d(\ln(J))} = RA_{eff} J + \frac{n}{\beta} H(J) \equiv V - (n/\beta) \ln(J/A^{**}T^2) H(J) = RA_{eff} J + n\phi_B. \quad (3)$$

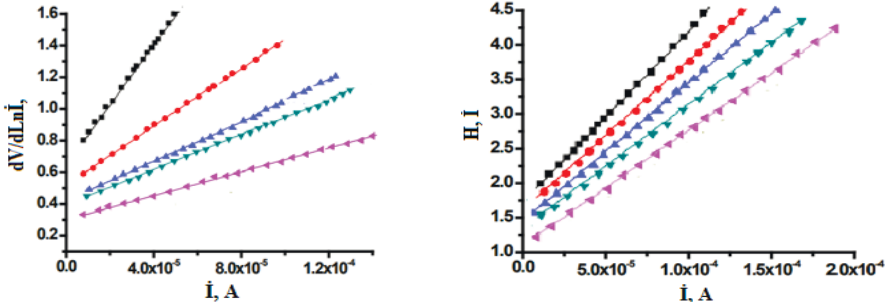
Ən kiçik kvadratlar metodu ilə $\ln I$ - U qrafiklərinin gərginliyin 0,2-0,8V qiymətləri intervalında ordinat oxuna approksimasiya ilə müxtəlif temperaturlarda I_s doyma cərəyanının qiyməti tapılmış və potensial çəpərin hündürlüyü hesablanmışdır. Otaq temperaturunda potensial çəpərin hündürlüyü 0,83 eV təşkil etmiş və temperaturun 80 k- qədər azalması ilə 0,075 eV qədər kiçilmişdir.

p-Si/n-ZnSSe heteroqəçidi üçün ideallıq əmsalı 300K-də 2,8 olması göstərir ki, heteroqəçid Si altlığı ilə ZnSe arasında səht hallarının mövcud olduğuna görə ideallıqdan uzaqdır. p-Si/n-ZnSSe heteroqəçidinin düzünə istiqamətdə I-V xarakteristikasının Çenq metodundan istifadə etməklə R_a -nın qiyməti hesablanmış, $dV/d(\ln I)$ -nin I-dən və $H(I)$ -nin I-dən asılılığı qurulmuşdur.



Şəkl. 1. p-Si/n-ZnSSe heteroqəçidinin normal (a) və yarımlaqariflik (b) koordinatda volt-ampere xarakteristikaları, T, K: 1-350, 2-300, 3-250, 4-180, 5-80.

R_a -nın qiyməti Çenq metodu ilə düzünə gərginliyin qiymətlərindən hesablanmışdır. $dV/d(\ln I)$ -nin cərəyandan asılılığının meylinə görə R_a və Y oxu ilə kəsişməsinə görə nkT/q təyin olunur (şəkil 2a). $H(I) - I$ asılılığının Y oxunu kəsdiyi nöqtə $n\phi_{B0}$ verir ki, buradan n -nin qiymətini tapırıq (şəkil 2b). Bu asılılığın meylinə görə də R_a -nı qiymətləndirməyin ikinci metodu sayılır. Hər iki metoddan alınan nəticələrin yaxınlığı bu yanaşmanın uyğunluğunu göstərir. R_a -nın $dV/d(\ln I) - I$ və $H(I) - I$ asılılıqlarının hər ikisindən alınan qiymət eyni olub, $10^3 \Omega$ -ə bərabərdir n , ϕ_{B0} və R_s -in qiymətləri temperaturdan kəskin asılıdır.

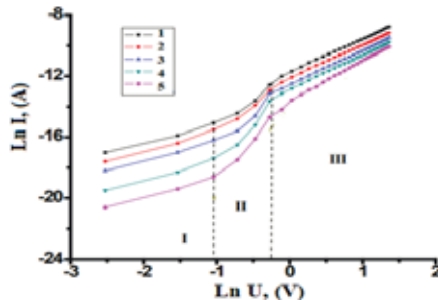


Şəkil 2. p-Si/n-ZnSSe heteroqəçidi üçün $dV/d(\ln I) - I$ (a) və $H(I) - I$ (b) asılılıqları, T, K: 1-350, 2-300, 3-250, 4-180, 5-80.

Düzünə istiqamətdə, kiçik gərginliklərdə, tədqiq olunan temperatur intervalında cərəyan $I = kV^m$ qanunu ilə ifadə olunur (şəkil 3). Çox kiçik gərginliklərdə cərəyan gərginlikdən xətti asılıdır. Orta gərginliklərdə (ikinci oblastda) qeyri-xətti oblast termoelektron emissiyası mexanizminə uyğun gəlir. Gərginliyin 0,8V-dan böyük qiymətlərində həcmi yüklərlə məhdudlanan cərəyan mexanizminə uyğun güclü injeksiya müşahidə olunur ($m=2,4$). Həcmi yüklər oblastında və ya keçid sərhədində dərin mərkəzlərdə rekombinasiyanın tunel keçidləri hesabına güclənməsinə əsaslanan bu cür yeni yanaşma son zamanlarda CIGS əsaslı günəş elementlərində cərəyanın birbaşa daşınması üçün tətbiq olunmuşdur. (1) tənliyini bu şəkllə salmaq

$$n \ln(J_s) = E_a/kT + n \ln(J_{00}) \quad (4)$$

$n \ln J - 1/kT$ asılılığı düz xətt verir ki, onun meylinə E_a aktivləşmə enerjisi üçün 1,3 eV tapılmışdır.



Şəkil 3. p-Si/n-ZnSSe heteroqəçidinin müxtəlif temperaturalarda loqarifmik miqyasda VAX-I, T, K: 1-350, 2-300, 3-250, 4-180, 5-80.

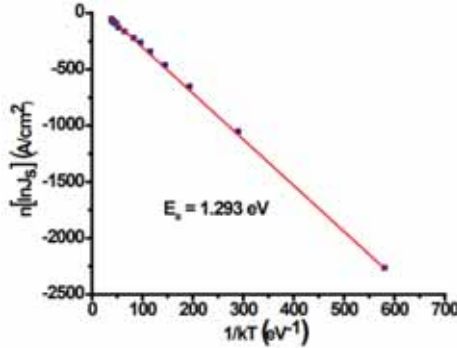
Bu qiymət ZnSe -nin qadağan olunmuş zonasının enindən kiçikdir ($E_g = 2,71$ eV) və onun dəşiklər üçün potensial çəpərə uyğun gəldiyini qəbul etmək olar. Bundan başqa, dəşiklərin Si-un daxilindən keçid sərhədinə tunel keçidi və delektronlarla rekombinasiyası ideallıq əmsalının temperaturdan aşağıdakı şəkildə asılılığına gətirir.

$$n = (E_{00}/kT) \coth (E_{00}/kT) \quad (5)$$

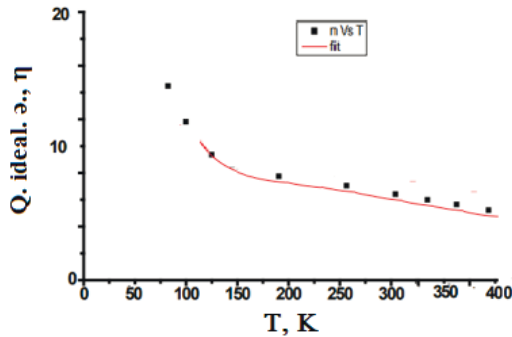
burada E_{00} - rekombinasiya prosesində tunel keçidlərinin payını xarakterizə edən tunel enerjisi hesab olunur. Əgər neytral həcmdə tələ səviyyələrindən rekombinasiya üstünlük təşkil edirsə, n-nin temperatur asılılığı bu şəkildə olar [6]

$$1/n = 1/2(1 + T/T^* - E_{00}^2/3k^2T^2) \quad (6)$$

Burada kT^* - tələ səviyyələrinin eksponensial paylanması xarakterik enerjisidir. Təklif olunan rekombinasiya kanalının doğruluğu ideallıq əmsalının temperatur asılılığına görə yoxlanılır. Bu asılılıq təcrübi olaraq qurulmuş (şəkil 4) (5) düsturuna görə alınmış nəzəri ifadəsilə yaxşı uzlaşır. Tunel enerjisi üçün alınmış qiymət $E_{00} = 95$ mƏB təşkil edir.



Şək. 4. p-Si/n-ZnSSe heteroqəçidi üçün $n \ln J_s$ kəmiyyətinin temperatur asılılığı

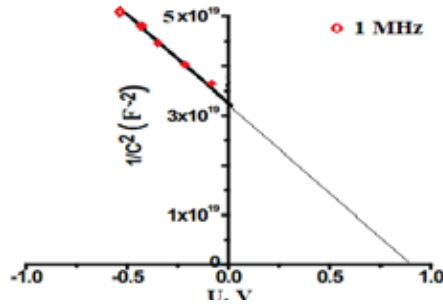


Şək. 5. p-Si/n-ZnSSe heteroqəçidinin Q / ideallıq əmsalının temperatur asılılıqları

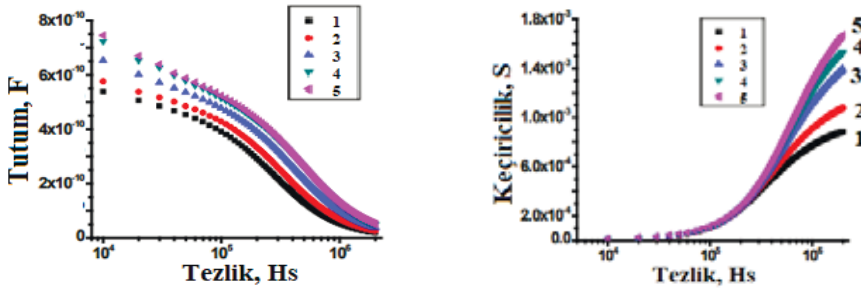
Tədqiq olunan heteroqəçidin tutumu otaq temperaturunda, 1MHs tezlikdə tətbiq olunan gərginlikdən asılılığı ölçülmüşdür. $1/C^2$ -nin gərginlikdən asılılıq qrafiki şəkil 6-da göstərilmişdir.

Elektronların konsentrasiyasının $1/C^2$ -U asılılığının meylinə görə hesab-

lanmış qiyməti otaq temperaturunda $3,16 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. V_{bi} potensial çəpərin hündürlüyünün qeyd olunan asılılığın gərginlik oxu ilə kəsişmə nöqtəsindən tapılmış qiyməti 0,89 eV təşkil edir. C-f variasiyası Şokli-Rid-Holl münasibətinə görə elektronları tutulub buraxılma prosesi ilə yaxşı izah olunur. Şəkil 7-də beş müxtəlif temperaturda tutum və keçiriciliyin tezlikdən asılılıq əyriləri göstərilmişdir. Aşağı tezliklərdə ($<10 \text{ kHz}$) keçiricilik faktiki dəyişmir, lakin yüksək tezliklərdə ($> 100 \text{ kHz}$) kəskin artır.



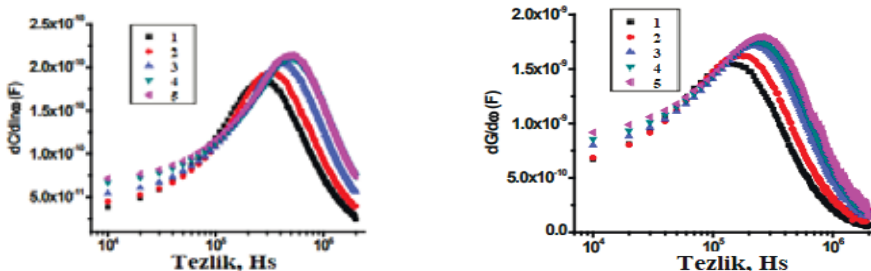
Şəkil 6. p-Si/n-ZnSSe heteroqecidinin tutum xarakteristikası



Şəkil 7. p-Si/n-ZnSSe heteroqecidinin tutumunun (a) və keçiriciliyinin (b) tezlikdən asılılıq xarakteristikaları

Defektlərin E_F -yə yaxın səviyyələri yükdaşıyıcıları tutub buraxmaqla keçiriciliyi dəyişə bilər.

Şəkil 8a və 8b-də göstərilirdiyi kimi $dC/d(\ln\omega)$ və $dG/d\omega$ asılılıq əyrilərinə piklərin vəziyyəti, əsasən də, xarakterik tezliyin qiyməti temperaturun artması ilə daha böyük qiymətlərə doğru sürüşür.



Şəkil 8. p-Si/n-ZnSSe heteroqecidinin tutumunun (a) və keçiriciliyinin (b) tezlikdən asılılıq xarakteristikaları

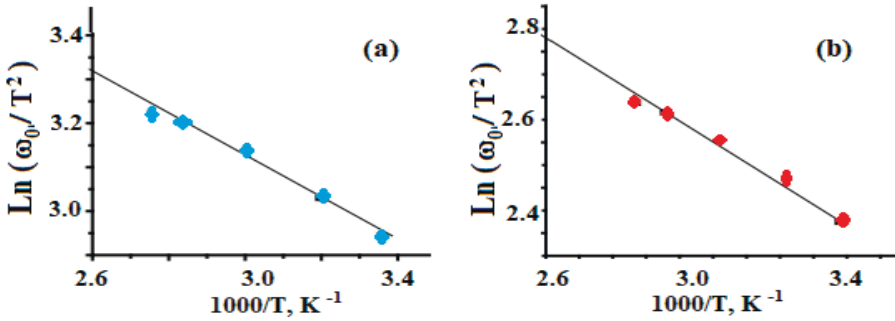
Şəkil 9 a,b-də $\ln(\omega_0/T^2)$ -nin $1/T$ -dən asılılığı, Arrenius qrafiki göstərilmişdir. Xarakteristik tezliklə (ω_0) temperatur arasında əlaqə [6, 7]:

$$\omega_0 = \xi_0 T^2 \exp [-(E_t - E_V)/kT] \quad (7)$$

$$\xi_0 = 2\sigma_t v_{th} N_V \quad (8)$$

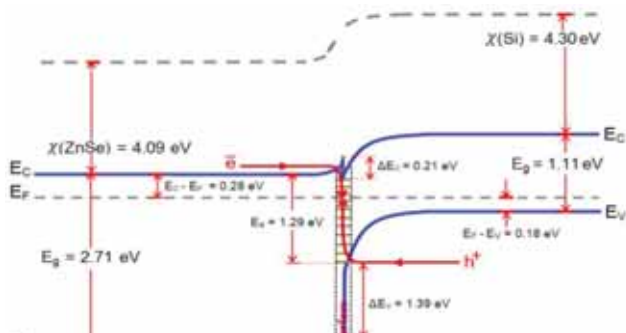
$$\ln(\omega_0/T^2) = \ln\xi_0 - (E_t - E_V)/kT \quad (9)$$

v_t – dəşiklərin orta istilik sürəti, N_V -valent zonasında effektiv hal sıxlığı, σ_t – tutma en kəsiyidir. Si materialı üçün $v_t = 1,1 \times 10^7$ sm / s və $N_V = 2,65 \times 10^{19}$ sm⁻³. Energetik səviyyənin ($E_t - E_V$) dərinliyi və tutma en kəsiyi uyğun olaraq qrafiklərin meyindən və $1/T$ oxu ilə kəsişmə nöqtəsindən tapılır. Defektlərin energetik səviyyəsi üçün $dC/(d\ln\omega)$ və $dG/d\omega$ asılılıqlarından tapılan qiymət - 0,05, ola bilsin ki, bor aşqarlarının Si-da yaratdığı akseptor səviyyəsi ilə bağlıdır.



Şək. 9. p-Si/n-ZnSSe heteroqəçidinin xarakteristik tezliyinin C-f və G-f əyrilərindən tapılmış qiymətləri üçün $\ln(\omega_0/T^2)$ kəmiyyətinin temperatur asılılığı

p-Si / n-ZnSSe heteroqəçidinin energetik zona quruluşunu Anderson modeliylə təsvir etmək olar (şəkil 10). Silisium altlığı ilə ZnSSe təbəqəsi arasında tunel şəffaf silisium oksid təbəqəsi ola bilər. Bu diaqramda Si və ZnSe-nin qadağan olunmuş eninin (E_g) qiymətlərinin uyğun olaraq 1,11 eV və 2,71 eV götürülmüşdür. Həmin materialların elektrona hərislik enerjiləri 4,30 eV və 4,09 eV təşkil edir. Şəkildə göstərilirdiyi kimi, keçirici zonada kəsinti $\Delta E_C = \chi$ (ZnSSe) - χ (Si) = 0,21 eV, valent zonasında isə $\Delta E_V = E_g$ (ZnSSe) - E_g (Si) - $\Delta E_C = 1,39$ eV-dur.



Şəkl. 10. p-Si/n-ZnSe heteroqəçidinin enerji diaqramı

ƏDƏBİYYAT

1. M.M. Ivashchenko, I.P. Buryk, A.S. Opanasyuk, D. Nam, H. Cheong, J.G. Vaziev, V.V. Bibyk, Influence of deposition conditions on morphological, structural, optical and electro-physical properties of ZnSe films obtained by close-spaced vacuum sublimation. *Materials Science in Semiconductor Processing* 36 (2015) 13-19.
2. X. Zhang, L. Wang, Y. Wu, Y. Wang, P. Gao, Y. Han, J. Jie, ZnSe nanowire / Si p-n heterojunction: device construction and optoelectronic applications, *Nanotechnology* 24 (2013) 395201-1-395201-7.
3. H.H. Gullu, O. Bayrakh, D.E. Yidiz, M. Parlak, Study on electrical properties of ZnSe/Si heterojunction diode, *J. Mater. Sci.: Mater. Electron.* Doi 10.1007/s10854-017-7721-9
4. H. Bayhan, A.S. Kavasoglu, Tunneling enhanced recombination in polycrystalline CdS/CdTe and CdS/Cu(In,Ga)Se₂ heterojunction solar cells, *Solid State Electronics* 49 (2005) 991-996.
5. S.M. Sze, K.N.G. Kwok, *Physics of Semiconductor Devices*, third ed., John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2007, pp. 124-129.
6. Y.Y. Proskuryakov, K. Durose, B.M. Taelle, G.P. Welch, Admittance spectroscopy of CdTe/CdS solar cells subjected to varied nitric-phosphoric etching conditions, *J. Appl. Phys.* 105 (2007) 014505-1-014505-8.
7. X.L. He, J.Q. Zhang, L.H. Feng, L.L. Wu, W. Li, G.G. Zeng, Z. Lei, B. Li, J.G. Zheng, Admittance spectroscopy characterize graphite paste for back contact of CdTe thin film solar cells, *Sci. China Tech. Sci.* 53 (2010) 2337-2341.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОСТРУКТУРИРОВАННОГО ГЕТЕРОПЕРЕХОДА p-Si/n-ZnSSe

Э.Ф.НАСИРОВ

РЕЗЮМЕ

Для изучения механизма тока в гетеропереходе исследованы его электрические свойства в диапазоне температур измерения 80–400 К. Исследована ВАХ гетероперехода p-Si/n-ZnSSe в прямом направлении. Значение последовательного сопротивления (R_a) рассчитано по методу Ченга, было установлено зависимость $dV/d(\ln I)$ от I и $H(I)$ от I . Структура энергетической зоны гетероперехода Si/n-ZnSSe описывался моделью Андерсона.

Ключевые слова: гетеропереход, механизм передачи тока, VAX, VFX.

ELECTRICAL PROPERTIES OF NANOSTRUCTURED p-Si/n-ZnSSe HETEROJUNCTION

E.F. NASIROV

SUMMARY

To study the mechanism of the current in the heterojunction, we investigated its electrical properties in the measurement temperature range 80–400 K. The $I - V$ characteristic of the p-Si/n-ZnSSe heterojunction in the forward direction was investigated, the series resistance (R_s) was calculated by the Cheng method, and was established the dependences $dV/d(\ln I)$ from I and $H(I)$ from I . The structure of the energy band of the Si n-ZnSSe heterojunction was described by Anderson model.

Keywords: heterojunction, current transfer mechanism, VAX, VFX

УДК 54.052

УДК 538.958

**STRUCTURE AND PHOTOLUMINESCENCE PROPERTIES
OF ZnS AND Ag₂S BASED NANOSYSTEMS****S.G.NURIYEVA, A.H.KARIMOVA***Nano Research Center, Baku State University
aynurakarimova16@gmail.com*

This study focuses on the various strategies in the preparation, structure, and photoluminescence of semiconductor nanomaterials. The particle's mean size in each synthesis approach was adjusted via variation of concentrations of initial aqueous solutions and varied at the large range of nanometric scale (~20-80 nm). The surface morphology of nanomaterials was investigated via Atom Force Microscopy, Scanning Electron Microscopy methods. Moreover, Infrared Spectroscopy, Photoluminescent Spectroscopy were used to study the interface of the nanoparticle and surrounding stabilizing medium.

Keywords: semiconductor nanoparticles, polymer nanocomposites, core-shell like nanostructures, matrix isolation technique, cation exchange method, hydrothermal process, combination of ultrasound and microemulsion techniques

1. Introduction

Synthesis and investigation of monodisperse semiconductor sulfide nanoparticles (e.g. PbS, CdS, ZnS, Ag₂S) with various structures and morphologies have been intensively studied for various applications. However, nanometer-sized particles indicate novel optical, electronic, and thermodynamic properties that differ from their bulk state characteristics. These unique properties allow us to prepare materials with linear and nonlinear optical, fluorescent properties for electronic technology applications (Ramazanov et al., 2019; Ramazanov et al., 2019; Ramazanov et al., 2019). One of the main problems of the synthesis process of nanoparticles is their size control issue which can be solved via polymer stabilizers (Ramazanov et al., 2018; Ramazanov et al., 2017). In this approach, the characteristics of the obtained nanocomposites are conditioned either by the properties of inorganic nanoparticles and the polymer matrix (Li et al., 2010). Another method is using inorganic substances as stabilizers or cover materials (Kudera et al., 2016). In this case, the chemical nature of the coating material can significantly influence the growth and structure of the nanoparticles during the synthesis process. Both approaches can allow to get

hybrid materials with a wide range of novel properties and guide the sizes of nanoparticles, as well.

The most famous representatives of semiconductor sulfide nano compounds are ZnS and Ag₂S. Nanocrystalline ZnS particles are characterized with a wide bandgap value which allows using them for optical purposes, for instance, as a luminophore material (Torimoto et al., 2007). The fact that Ag₂S nanoparticles have a narrow gap zone makes them a potential substance for photoconductors and solar cells (Xiaodong et al., 2008).

There are numerous studies related to the synthesis and the investigation of the properties of heterogeneous structures, as well as nanocomposites based on the ZnS and Ag₂S nanoparticles. Novel, fast, and commercially available features of synthesis technologies such materials are rather a necessary issue. Moreover, controlling particle sizes and their distribution are important aspects, as well (Murugadoss et al., 2015; Reddy et al., 2007; Su et al., 2008; Li et al., 2018; Zhang et al., 2016).

The study develops simple and effective technologies for obtaining nanocomposites based on PP/ZnS, PP/Ag₂S, and Ag₂S/ZnS, as well as Ag₂S, ZnS porous nanoparticles. Besides, the structural characterization and optical properties of the synthesized nanosystems were investigated.

2. Materials

Isotactic polypropylene (PP) powder (M 250000g/mol) with a particle size of 0.5-1.0µm, nitric acid silver (I) (AgNO₃), zinc sulfate heptahydrate (ZnSO₄·7H₂O), zinc acetate dihydrate (Zn(CH₃COO)₂·2H₂O), sodium sulfide nonahydrate (Na₂S·9H₂O), toluene (C₇H₈), sodium lauryl sulphate (NaC₁₂H₂₅SO₄), deionized water. All chemicals are of analytical grade and not require further purification.

3. Methods

3.1. Synthesis of PP/ZnS Nanocomposites

The PP/ZnS nanocomposite materials were prepared via the matrix isolation technique: ZnS nanoparticles were formed by chemical reactions in a polymeric matrix (Magerramov et al., 2010; Magerramov et al., 2010). The advantage of this method is the incorporation of the nanoparticles in the bulk of the polymeric matrix directly in the state of their synthesis process, which makes it a relatively simple approach. Firstly, a certain amount of the polypropylene (PP) powder was mixed with the 50 ml of the ZnSO₄ solution with a concentration of 0.1 M. The resulting mixture was placed into a magnetic stirrer for an hour, at room temperature. Subsequently, the powder was filtered and dried in the vacuum oven for a day at the 60°C for evaporation of the excess solvent. Next, the dry powder was mixed with 50 ml of the Na₂S·9H₂O solution with a concentration of 0.1 M. Next, it was again placed into the magnetic stirrer for an hour. The filtration and drying processes were repeated

similarly. Afterward, at a melting temperature of PP and 10 MPa pressure for 5 minutes by hot pressing PP/ZnS films were prepared (**Sample I**).

Other samples of the powder and film were obtained using solutions of ZnSO₄ and Na₂S·9H₂O with concentrations of 0.5 M (**Sample II**) and 1 M (**Sample III**) respectively. The film color varied with the concentration value: from light brown for samples with low ZnS content to brown for systems with a high content of the inorganic component.

3.2. Synthesis of PP/Ag₂S Nanocomposites

PP/Ag₂S nanocomposite materials were obtained via a combination of two synthetic methods – ultrasound and microemulsion techniques. The reaction flask in which the reaction is conducted under the influence of ultrasonic radiation was purged with nitrogen to displace air. Aqueous solutions of AgNO₃ and Na₂S·9H₂O salts with a concentration of 0.0025 M were prepared. Then, 0.5 g of PP powder was dissolved in 50 ml of toluene. 1 ml of the appropriate aqueous solution of the salt in the presence of 0.05 g of sodium lauryl sulfate was mixed with 25 ml of toluene/PP. Each water microemulsion (solution1)/toluene+PP and (solution2)/toluene+PP were sonicated for 20 min (0.6 cm diameter; Ti-tip; 20kHz; 60W/cm²) at 300°C temperature supported by a cooling bath. Then, a microemulsion containing (solution2)/PP+toluene was slowly added dropwise into water microemulsion (solution1)/PP+toluene at 300°C temperature and an ultrasonic treatment carried out for 30 minutes. At the end of the reaction, the color of the microemulsion turned dark grey that proved the formation of silver sulfide nanoparticles. The resulting dispersion containing nanoparticles of silver sulfide and polypropylene were subjected to vacuum evaporation for excess solvent and the product was poured onto a glass plate to form a polymer film at room temperature. By hot pressing at a melting temperature of PP and 10 MPa pressure for 5 minutes period film samples are produced from this nanocomposite sample (**Sample IV**). Other samples of the powder and film were obtained using solutions of AgNO₃ and Na₂S·9H₂O with concentrations of 0.005 M (**Sample V**) and 0.01 M (**Sample VI**) respectively.

3.3. Synthesis of Porous ZnS and Ag₂S Nanospheres

ZnS nanoparticles were prepared by the hydrothermal process (Li et al., 2018; Zhang et al., 2013). Briefly, 0.005 M solutions of Zn(CH₃COO)₂·2H₂O (I) and Na₂S·9H₂O (II) were prepared and each stirred with 0.01 g NaC₁₂H₂₅SO₄. Then, solution II was added drop-wise to the solution I under sonication for 10 min. Then, the white, clear dispersion was centrifuged for 5 min at 3200 pm and filtered. Finally, the precipitate was washed several times with ethanol and dried in a vacuum oven at 60°C (**Sample VII**). Ag₂S nanoparticles were prepared by the hydrothermal process, as well. In this case, the concentrations of initial solutions of AgNO₃ and Na₂S·9H₂O salts were 0.01 M and 0.005 M respectively (**Sample VIII**). The following stages of the synthesis process were

carried out in a similar way that described above.

3.4. Synthesis of Ag₂S/ZnS Nanocomposites

Ag₂S/ZnS nanocomposites were synthesized via a cation exchange method that consists of two steps. It is known that the solubility product constants K_{sp} of Ag₂S and ZnS substances differ from each other (K_{Ag₂S}=1x10⁻⁵⁰, K_{ZnS}=1x10⁻²³) (Dean & Lange, 1999). Due to these features in the formation process of the nanocomposite, ZnS nanoparticles function as core which is coated by Ag₂S nanoparticles and act as reaction precursors, as well.

Ag₂S/ZnS nanostructures were obtained via water solutions of ZnS and AgNO₃ with concentrations of 0.005M and 0.01M, respectively. For the coating of the ZnS nanoparticles with the Ag₂S nanoparticles, the water solution of AgNO₃ salt was added to the ZnS salt solution and mixed in a magnetic stirrer for 5 hours. Further, the sample was washed several times with ethanol and distilled water, then dried in a vacuum oven at 60°C (**Sample IX**).

4. Results and Discussion

4.1. Structural Characterization

The structure of the obtained PP/ZnS nanocomposites depending on the sizes of semiconductor particles was studied via IR Spectroscopy in the spectral range 4000 ... 500 cm⁻¹, at room temperature. IR spectra were determined both for PP film and nanocomposites based on them (Figure 1).

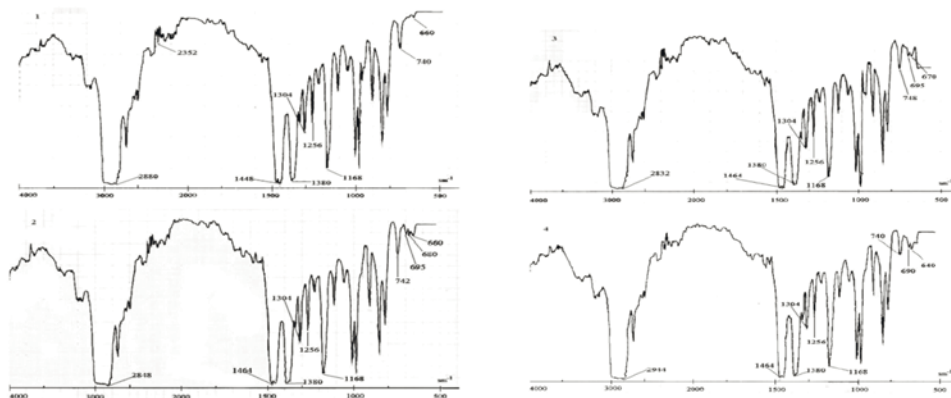


Fig. 1. IR spectra of the pure PP (1) and PP/ZnS nanocomposites: Sample I (2), Sample II (3) and Sample III (4)

The PP spectrum contains a band at the 2352 cm⁻¹ with weak intensity, that is not observed in the spectra of nanocomposite samples. The presence of this band in the spectrum makes it possible to interpret a qualitative analysis. However, it is assumed that this vibration is typical for polypropylene atoms localized on individual bonds, structural fragments, or groups. The position and intensity of the bands observed at the range of 660–750 cm⁻¹ in the spectra of nanocomposites PP/ZnS can be attributed to the presence of a low weight

molecular compound in a macromolecule.

The band 2880 cm^{-1} with high intensity in the spectrum of pure PP which is identified as the symmetric stretching vibration of CH_3^- groups distorted to 2848 cm^{-1} for **Sample I**. For **Sample II** and **Sample III**, this appears at 2832 cm^{-1} and 2944 cm^{-1} respectively. It could be associated with the changes in the distances between atoms that are observed during the transition of symmetric stretching vibrations of CH_3^- groups to the CH_2^- groups. Moreover, the intensity variation of the absorption bands at 1168 , 1256 , and 1304 cm^{-1} are associated with an increase in the amount of ZnS nanoparticles in the polymer matrix.

Synthesized nanostructures surface morphology and their dimensions were evaluated via scanning atomic force (AFM) and electron microscopy (SEM). Figure 2 shows 2D AFM images of PP/ZnS nanocomposites obtained via various concentrations of initial solutions.

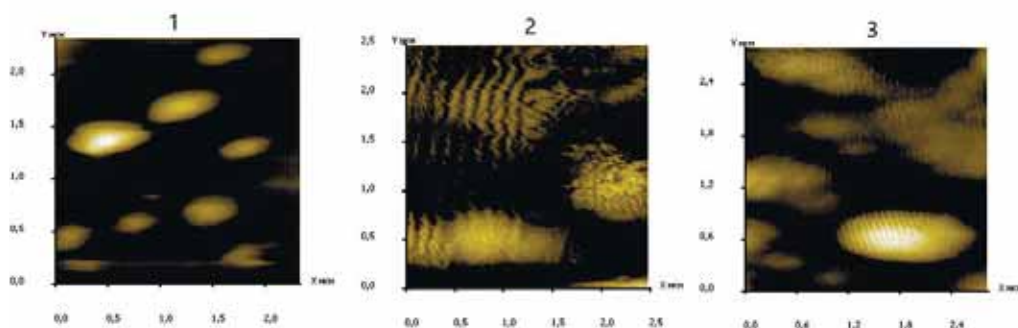


Fig. 2. AFM images of PP/ZnS nanocomposites: Sample I (1), Sample II (2) and Sample III (3)

The experimental results showed that with an increase of the initial solution concentrations, the sizes of ZnS nanoparticles in the PP matrix rise. However, in the process of cluster formation, ZnS nanoparticles began to merge into the center of the crystallization of the nucleus. This, in our opinion, occurred because, with an increase of the concentration value of the initial solutions, the majority of the Zn^{2+} and S^{2-} ions are spent on the coagulation of the early particles rather than on the formation of new nuclei.

Particles with approximate sizes of 25-40 nm were formed at the low 0.1 M concentrations of the initial solutions (**Sample I**), while nearly 50-55 and 70-90 nm sizes of nanoparticles were generated with the concentrations of the initial solutions of 0.5 M (**Sample II**) and 1 M (**Sample III**), respectively (Figure 3).

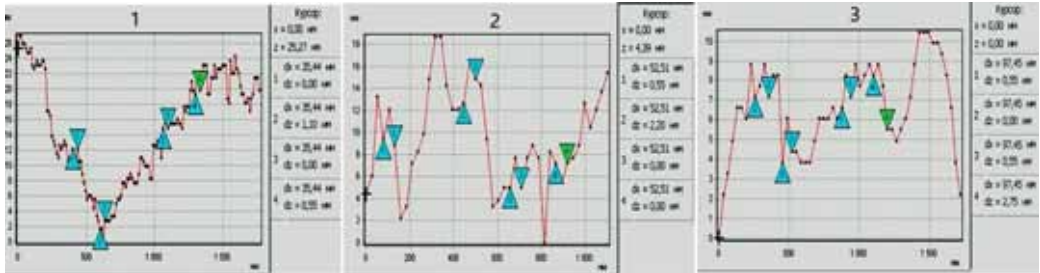


Fig. 3. Dimensions of ZnS nanoparticles in PP/ZnS nanocomposites: Sample I (1), Sample II (2) and Sample III (3)

Also, the distribution histogram surface structural elements of nanocomposite material in a particular field obtained for Sample 1 (Figure 4).

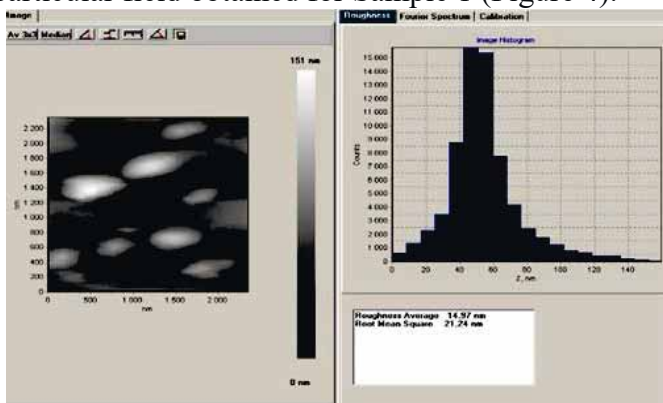


Fig. 4. Histogram of the structural elements of the nanocomposite image (Sample I)

Figure 4 indicates that the average surface roughness of nanocomposite is 14.97 nm. Moreover, the distribution of the Fourier analysis showed that ZnS nanoparticles are uniformly spread in the polymer matrix.

The morphology of the nanocomposite PP/Ag₂S and the size of distributed Ag₂S nanoparticles were also examined via AFM analysis. Figure 5 shows the 2D AFM images of the surface nanocomposites PP/Ag₂S, obtained at various concentrations of the initial solutions.

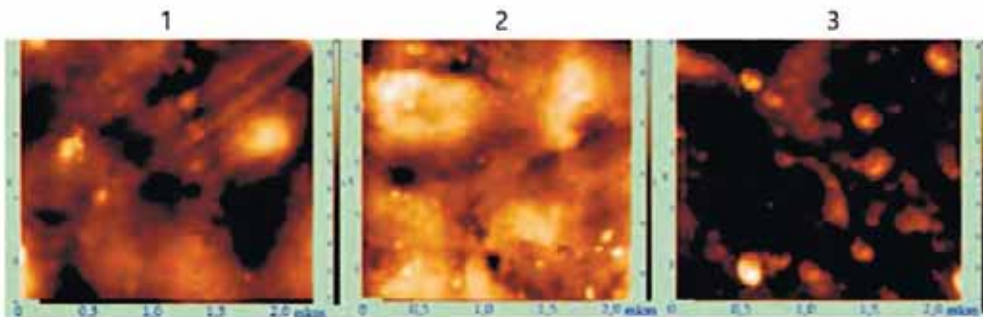


Fig. 5. AFM images of PP/ Ag₂S nanocomposites: Sample IV (1), Sample V (2), and Sample VI (3)

AFM study showed that with increasing concentration of the initial solutions in the polymer matrix the size of Ag_2S nanoparticles rises. Moreover, it was indicated that the size of Ag_2S nanoparticles changes in the intervals of nearly 20-60 nm.

Figure 6 exhibits the distribution histogram surface structural elements of nanocomposite materials in a particular field.

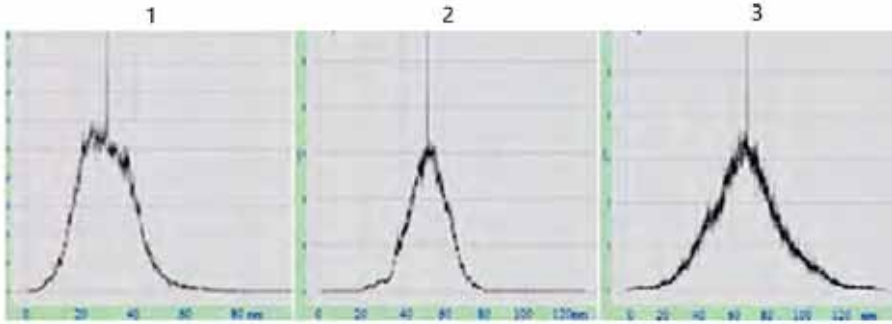


Fig. 6. Histogram of the structural elements of the PP/ Ag_2S nanocomposite images: Sample IV (1), Sample V (2) and Sample VI (3)

AFM study showed that the square roughness variation of the nanocomposites related to their synthesis characterization. However, in the the formation process of Ag_2S nanoparticles in polymer matrix the increasing concentrations of the initial salts led to changing of the surface morphology and sizes, as well. It is clear from Figure 6 that the roughness of structural elements varies at the spans of 20-40 nm, 40-60 nm, and 60-80 nm for **Sample IV**, **Sample V**, and **Sample VI** respectively. It is assumed that in the process of the formation of clusters Ag_2S nanoparticles merged and increased in the primary formed center of crystallization. However, the the minority of the Ag^+ and S^{2-} ions were play role in the formation of new nuclei centers. SEM study of nanocomposites also allowed to determine that Ag_2S nanoparticles had a spherical shape and their distribution was uniform in the PP matrix (Figure 7).

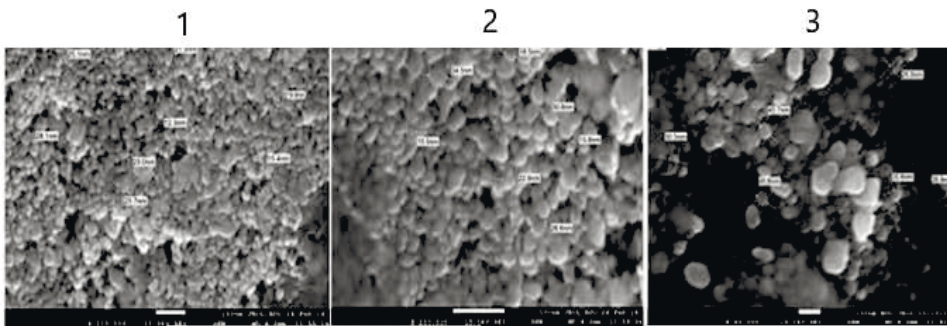


Fig. 7. SEM images of PP/ Ag_2S nanocomposites: Sample IV (1), Sample V (2), and Sample VI (3)

Shape and size distribution of ZnS (Sample VII) and Ag₂S (Sample VIII) nanoparticles were investigated via the SEM analysis method (Figure 8).

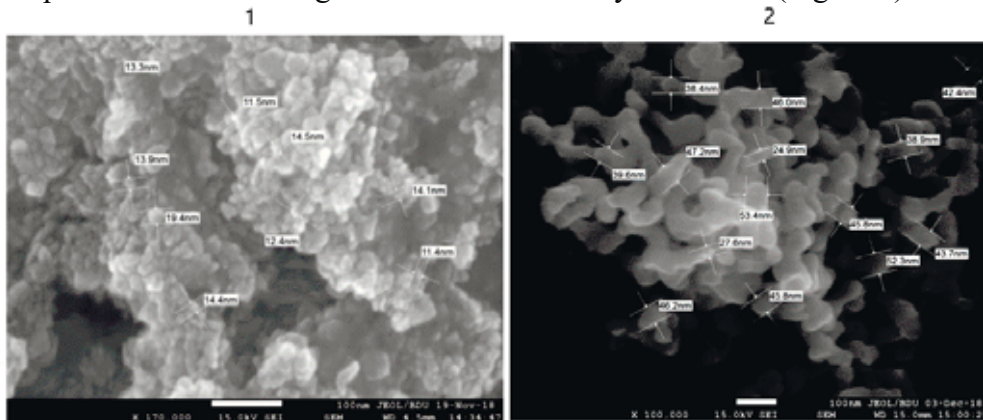


Fig. 8. SEM of images of Sample VII (1) and Sample VIII (2)

Electron microscopic examination of nanocomposites demonstrated that the shape and size distribution of nanoparticles were uniform and homogenous. SEM examination showed that the size of the spherical ZnS nanoparticles changed in the range of 10-20 nm, while for ellipsoidal Ag₂S nanoparticles it was about 25-50 nm. Moreover, all synthesized nanoparticles were monodispersed.

Figure 9 shows the microstructure, shape, and size of Ag₂S/ZnS nanocomposite (Sample IX) at various magnifications.

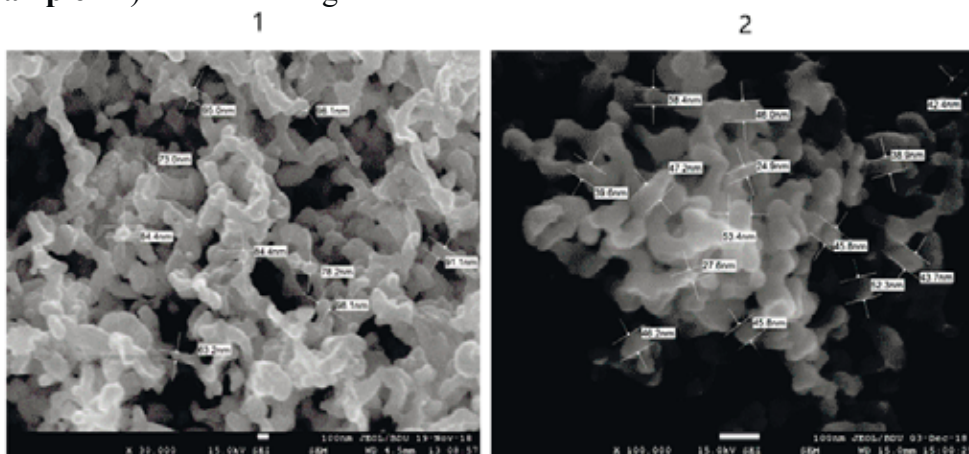


Fig. 9. SEM images of Sample IX at various zooming: 30K (1), 100K (2)

At low magnification (30K) it is possible to observe relatively large particles with a size of about 50-90 nm, while at high magnification the size of formed nanoparticles is rather smaller, nearly 20-40 nm. Consequently, SEM analysis demonstrated that the size of the nanoparticles in Ag₂S/ZnS nanocomposite was approximately 25-90 nm.

According to the results of the studies, it can be said that Ag₂S nanoparticles were formed on the surface of ZnS nanospheres, and products had like core-shell structure. These results are consistent with the literature data (Murugadoss et al., 2015).

4.2. Optical characterization

The photoluminescence (PL) of ZnS nanoparticles in the PP matrix was investigated, as well. Spectra for all samples were recorded in the range of 330-700 nm and the samples were excited at wavelength $\lambda_{ex}=320$ nm at room temperature. Figure 10 shows the photoluminescence spectra of PP film and nanocomposite samples obtained from various concentrations of initial ZnSO₄ and Na₂S·9H₂O solutions.

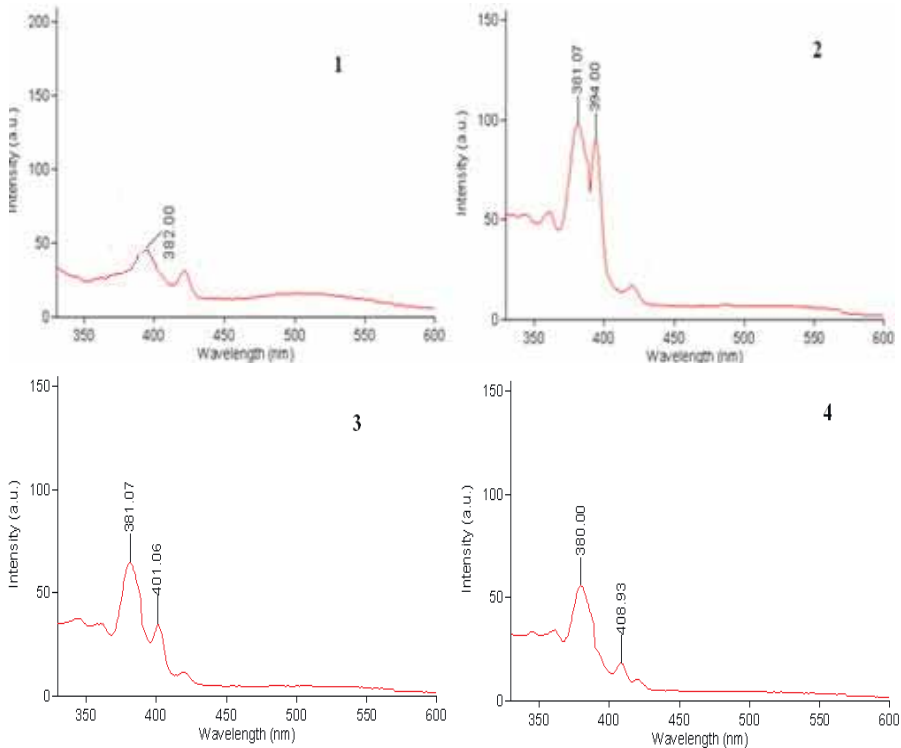


Fig. 10. PL spectra of the pure PP (1) and PP/ZnS nanocomposites: Sample I (2), Sample II (3), Sample III (4)

It has been established that with the introduction of ZnS nanoparticles into the PP matrix, new maximums are formed. Moreover, it can be seen that with an increase of the concentration of the initial solutions, the fluorescence spectra of nanocomposites change: at the concentration of 0.1 M the maximum is observed at $\lambda_{max}=394$ nm, and a further increase in the sizes of the nanoparticles leads to a shift of the maxima towards a longer wavelength (for 0.5 M and 1 M concentrations peaks are observed at $\lambda_{max}=401$ nm and $\lambda_{max}=408$ nm respec-

tively). The effect of nanoparticle sizes on optical spectra was found for many types of semiconductors (Henglein, 1988; Koole et al., 2014) and is associated with the existence of the quantum size effect. Since in semiconductors the intermolecular interaction energy is high, in describing the electronic properties a macroscopic crystal can be considered as one large molecule. The electronic excitation of semiconductor crystals leads to the formation of a weakly bound electron-hole pair. The delocalization region of such a pair of compounds can be larger than its crystal lattice constant in several times. A decrease in semiconductor crystal to sizes comparable with the delocalization region of an electron – hole pair affects its electronic characteristics. A vivid example of such an effect is the “blue shift” of the photoluminescence spectrum of a semiconductor crystal with a decrease in its size.

Moreover, high filler concentration and size lead to the decrease of the characteristic maximum ($\lambda_{\max}=382$ nm) intensity of the polymer. This is due to the modifying effect of the filler on the polymer. However, this effect of nanoparticles possesses an electrical nature; it can be assumed that charged nanoparticles, distributed in the bulk of the polymer matrix, due to the orientational and adsorption interaction of phases at the polymer-filler interface can cause molecular ordering processes in the amorphous phase of the polymer. The orientational and adsorption effect of nanoparticles on the polymer in its turn leads to a decrease in the intensity of photoluminescence spectra.

Photoluminescence spectra for PP/Ag₂S nanocomposites were studied in the wavelength range 300-700 nm and excited at wavelength $\lambda_{\text{ex}}=220$ nm. Figure 11 shows the photoluminescence spectra of the nanocomposite samples obtained from various concentrations of initial AgNO₃ and Na₂S·9H₂O solutions.

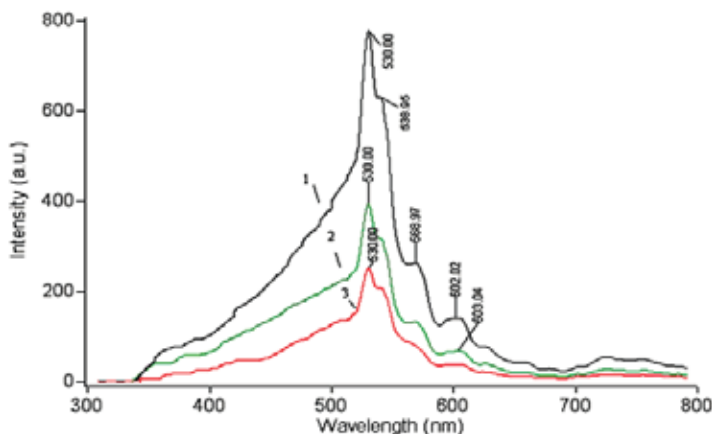


Fig. 11. PL spectra of the PP/Ag₂S nanocomposites: Sample IV (1), Sample V (2), Sample VI (3)

In steady-state luminescence spectra observed major band with $\lambda_{\text{max}}=530$ nm, $\lambda_{\text{max}}=539$ nm, $\lambda_{\text{max}}=568$ nm, $\lambda_{\text{max}}=602$ nm, which are responsible for the Ag_2S nanoparticles. It is seen that with increasing concentration of Ag_2S the amplitude of the photoluminescence peak at the wavelength decreases. A significant decrease of the luminescence intensity at high concentrations and sizes of the nanoparticles possibly due to the phenomenon of concentration quenching and decrease of the specific surface of the nanoparticles in a polymer matrix. It is assumed that the reduction of the intensity of the luminescence at high concentrations can also be interpreted as a result of the electron-hole transfer of excitation from one cluster to another due to the electric interaction. Photoluminescence spectra (Figure 12) of synthesized ZnS , Ag_2S nanoparticles, and $\text{Ag}_2\text{S}/\text{ZnS}$ nanocomposite were examined at room temperature, and the excitation wavelength was $\lambda_{\text{ex}}=320$ nm.

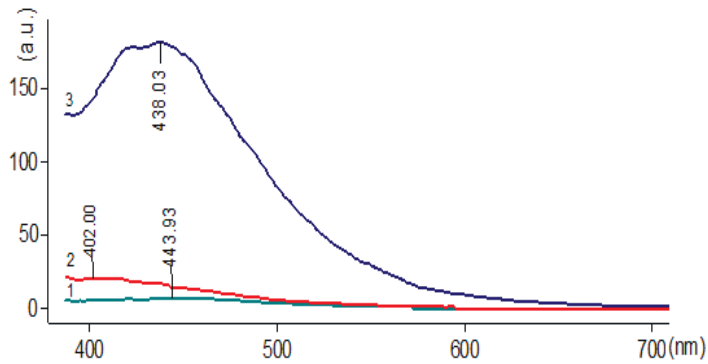


Fig. 12. PL spectra of synthesized nanosystems: Sample VIII (1), Sample IX (2), and Sample VII (3)

According to the ZnS nanoparticles spectra, a maximum at 438 nm was observed in the visible region (3). This emission maximum is related to the recombination of electrons from the sulfur vacancy donor level (VS) with holes in the valence band. The next part of the spectrum from 500 nm pertains to Zn vacancies (Karar et al., 2004).

Following the formation of the Ag_2S nanoparticles on the surface of ZnS ones, the intensity of the emission spectrum of the formed composite decreases. This occurs due to the improved electron transfer between ZnS and Ag_2S nanoparticles, involving the recombination of electrons and holes reduction. The formation of $\text{Ag}_2\text{S}/\text{ZnS}$ nanocomposite thus reduces both electron and holes recombination (Huang et al., 2018, Li et al., 2018, Wang et al., 2014). The maximum at the wavelength of 402 nm is related to the recombination of sulfur atoms. Also, increasing the thickness of the interphase layer causes the formation of surface traps and crystallographic defects (Dorfs et al., 2008; Ghosh Chaudhuri and Paria, 2013; Zhang et al., 2013).

5. Conclusion

Semiconductor nanoparticles and nanocomposite materials were successfully synthesized by hydrothermal process, matrix isolation technique, the combination of ultrasound and microemulsion methods, and cation exchange method. The main feature of these methods is the simplicity of the synthesis process and controlling of size nanoparticles and their distribution. Moreover, synthesis technologies of polymer nanocomposites were provided to form homogeneous semiconductor nanoparticles in a polypropylene matrix. All samples were characterized using various analytical techniques including AFM, SEM, IR, and PL. It was dedicated that the high concentration value of precursors in polymer nanocomposite synthesis methods allowed to get comparable large particles that imposed morphology of the system and PL properties, as well. Also, the optical characterization of the semiconductor nanoparticles with their core-shell like nanocomposites was explained via their electronic features.

REFERENCES

1. Dean, J. A., & Lange, N. A. (1999). Lange's handbook of chemistry.
2. Dorfs, D., Franzl, T., Osovsky, R., Brumer, M., Lifshitz, E., Klar, T. A., & Eychmüller, A. (2008). Type-I and Type-II nanoscale Heterostructures based on CdTe Nanocrystals: A comparative study. *Small*, 4(8), 1148-1152. <https://doi.org/10.1002/smll.200800287>
3. Ghosh Chaudhuri, R., & Paria, S. (2013). Optical properties of double-shell hollow ZnS–Ag₂S nanoparticles. *The Journal of Physical Chemistry C*, 117(44), 23385-23390. <https://doi.org/10.1021/jp408105m>
4. Henglein, A. (1988). Mechanism of reactions on colloidal microelectrodes and size quantization effects. *Topics in Current Chemistry*, 113-180. <https://doi.org/10.1007/bfb0018073>
5. Huang, Y., Li, K., Lin, Y., Tong, Y., & Liu, H. (2018). Enhanced efficiency of electron-hole separation in Bi₂O₂CO₃ for photocatalysis via acid treatment. *ChemCatChem*, 10(9), 1982-1987. <https://doi.org/10.1002/cctc.201800101>
6. Karar, N., Singh, F., & Mehta, B. R. (2004). Structure and photoluminescence studies on ZnS: Mn nanoparticles. *Journal of Applied Physics*, 95(2), 656-660. <https://doi.org/10.1063/1.1633347>
7. Koole, R., Groeneveld, E., Vanmaekelbergh, D., Meijerink, A., & De Mello Donegá, C. (2014). Size effects on semiconductor nanoparticles. *Nanoparticles*, 13-51. https://doi.org/10.1007/978-3-662-44823-6_2
8. Kudera, S., Maus, L., Zanella, M., Pelaz, B., Zhang, Q., Parak, W., Del Pino, P., & Parak, W. (2016). Inorganic core-shell nanoparticles. *Comprehensive Nanoscience and Nanotechnology*, 171-186. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-803581-8.00581-6>
9. Li, H., Xie, F., Li, W., Yang, H., Snyders, R., Chen, M., & Li, W. (2018). Preparation and photocatalytic activity of Ag₂S/ZnS core-shell composites. *Catalysis Surveys from Asia*, 22(3), 156-165. <https://doi.org/10.1007/s10563-018-9249-2>
10. Li, H., Xie, F., Li, W., Yang, H., Snyders, R., Chen, M., & Li, W. (2018). Preparation and photocatalytic activity of Ag₂S/ZnS core-shell composites. *Catalysis Surveys from Asia*, 22(3), 156-165. <https://doi.org/10.1007/s10563-018-9249-2>
11. Li, S., Meng Lin, M., Toprak, M. S., Kim, D. K., & Muhammed, M. (2010). Nanocomposites of polymer and inorganic nanoparticles for optical and magnetic applications. *Nano Reviews*, 1(1), 5214. <https://doi.org/10.3402/nano.v1i0.5214>

12. Magerramov, A. M., Ramazanov, M. A., & Mustafaeva, A. K. (2010). Structure and properties of nanocomposites based on zinc sulfide and poly(vinylidene fluoride). *Russian Journal of Applied Chemistry*, 83(7), 1324-1327. <https://doi.org/10.1134/s1070427210070293>
13. Magerramov, A. M., Ramazanov, M. A., & Mustafaeva, A. K. (2010). Photoluminescence in nanocomposites based on PVDF + ZnS. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*, 46(3), 281-284. <https://doi.org/10.3103/s1068375510030166>
14. Murugadoss, G., Jayavel, R., Rajesh Kumar, M., & Thangamuthu, R. (2015). Synthesis, optical, photocatalytic, and electrochemical studies on Ag₂S/ZnS and ZnS/Ag₂S nanocomposites. *Applied Nanoscience*, 6(4), 503-510. <https://doi.org/10.1007/s13204-015-0448-0>
15. Ramazanov, M. A., Chianese, A., Hajiyeva, F. V., & Novruzova, A. A. (2019). Structure and photoluminescence properties of hybrid Nanocomposites on the base of PP/PbS/CdS. *Integrated Ferroelectrics*, 201(1), 55-61. <https://doi.org/10.1080/10584587.2019.1668690>
16. Ramazanov, M. A., Chianese, A., Hajiyeva, F. V., & Novruzova, A. A. (2019). Structure and photoluminescence properties of hybrid Nanocomposites on the base of PP/PbS/CdS. *Integrated Ferroelectrics*, 201(1), 55-61. <https://doi.org/10.1080/10584587.2019.1668690>
17. Ramazanov, M. A., Maharramov, A. M., Nuriyeva, S. G., & Hajiyeva, F. V. (2017, April). Structure and dielectric properties of polymer nanocomposites on the basis of polypropylene and silver sulfide PP/Ag₂S [Conference session]. *International Conference Modern Trends in physics*, Baku, Azerbaijan.
18. Ramazanov, M. A., Maharramov, A. M., Nuriyeva, S. G., Hasanova, U. A., & Hajiyeva, F. V. (2018). Influence of Preparation Technology - Crystallisation Temperature-Time Regime on Supramolecular Structure and Properties of PP/Ag₂S Nanocomposites. *Journal of Optoelectronic and Biomedical Materials*, 10(2), 37-42.
19. Ramazanov, M., Hajiyeva, F., Babayev, Y., Valadova, G., Nuriyeva, S., & Shirinova, H. (2019). Synthesis and optical properties of PVC-CdS-based nanocomposites. *Journal of Elastomers & Plastics*, 52(2), 159-166. <https://doi.org/10.1177/0095244319827989>
20. Reddy, M., Venugopal, A., & Subrahmanyam, M. (2007). Hydroxyapatite photocatalytic degradation of calmagite (an azo dye) in aqueous suspension. *Applied Catalysis B: Environmental*, 69(3-4), 164-170. <https://doi.org/10.1016/j.apcatb.2006.07.003>
21. Su, W., Chen, J., Wu, L., Wang, X., Wang, X., & Fu, X. (2008). Visible light photocatalysis on praseodymium(iii)-nitrate-modified TiO₂ prepared by an ultrasound method. *Applied Catalysis B: Environmental*, 77(3-4), 264-271. <https://doi.org/10.1016/j.apcatb.2007.04.015>
22. Torimoto, T., Adachi, T., Okazaki, K., Sakuraoka, M., Shibayama, T., Ohtani, B., Kudo, A., & Kuwabata, S. (2007). Facile synthesis of ZnS–AgInS₂Solid solution nanoparticles for a color-adjustable Luminophore. *Journal of the American Chemical Society*, 129(41), 12388-12389. <https://doi.org/10.1021/ja0750470>
23. Wang, X., Li, Y., Wang, M., Li, W., Chen, M., & Zhao, Y. (2014). Synthesis of tunable ZnS–CuS microspheres and visible-light photoactivity for rhodamine B. *New J. Chem*, 38(9), 4182-4189. <https://doi.org/10.1039/c4nj00264d>
24. Xiaodong, Z., Huaqiang, S., Daming, H., Shumin, J., Xun, F., & Kui, J. (2008). Room temperature synthesis and electrochemical application of imidazoline surfactant-modified Ag₂S nanocrystals. *Materials Letters*, 62(16), 2407-2410. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2007.12.008>
25. Zhang, H., Wei, B., Zhu, L., Yu, J., Sun, W., & Xu, L. (2013). Cation exchange synthesis of ZnS–Ag₂S microspheric composites with enhanced photocatalytic activity. *Applied Surface Science*, 270, 133-138. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2012.12.140>
26. Zhang, X., Liu, X., Zhang, L., Li, D., & Liu, S. (2016). Novel porous Ag₂S/ZnS composite nanospheres: Fabrication and enhanced visible-light photocatalytic activities.

ZnS və Ag₂S ƏSASLI NANOSİSTEMLƏRİN QURULUŞU VƏ FOTOLÜMINESSENSİYA XÜSUSİYYƏTLƏRİ

S.Q.NURİYEVA, A.H.KƏRİMOVA

XÜLASƏ

Tədqiqat işi yarımkeçirici nanomaterialların sintezi, quruluşu və fotolüminessensiya xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi istiqamətində müxtəlif strategiyaları əks etdirir. Sintez proseslərində hissəciklərin orta ölçüsü ilkin sulu məhlulların qatılıqlarının dəyişməsi ilə tənzimlənmiş və geniş tərtibdə (~20-80nm) dəyişmişdir. Nanomaterialların səth morfologiyası atom qüvvə mikroskopiyası, skanedici elektron mikroskopiyası üsulları ilə tədqiq edilmişdir. Həmçinin, stabiləşdirici mühit ilə nanohissəciklər arasındakı qarşılıqlı təsirin tədqiqi üçün infraqırmızı spektroskopiya və fotolüminessensiya analiz üsulları istifadə edilmişdir.

Açar sözlər: yarımkeçirici nanohissəciklər, polimer nanokompozitlər, nüvə-örtük tipli nanoquruluşlar, matrisdə izolyasiya texnikası, kation mübadiləsi metodu, hidrotermal proses, ultrasəs və mikroemulsiya texnikasının birləşməsi

СТРУКТУРА И ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ СВОЙСТВА НАНОСИСТЕМ НА ОСНОВЕ ZnS И Ag₂S

С.Г.НУРИЕВА, А.Х.КАРИМОВА

РЕЗЮМЕ

В исследовании основное внимание уделяется различным стратегиям получения, структуры и фотолюминесценции полупроводниковых наноматериалов. Средний размер частиц в каждом подходе к синтезу регулировался путем варьирования концентраций исходных водных растворов и масштаб изменялся в широком диапазоне (~ 20-80 нм). Морфология поверхности наноматериалов исследовалась методами атомно-силовой микроскопии, сканирующей электронной микроскопии. Кроме того, инфракрасная спектроскопия, фотолюминесцентная спектроскопия использовались для изучения границы раздела наночастиц и окружающей стабилизирующей среды.

Ключевые слова: полупроводниковые наночастицы, полимерные нанокомпозиты, наноструктуры типа ядро-оболочка, метод матричной изоляции, катионообменный метод, гидротермальный процесс, сочетание ультразвуковых и микроэмульсионных методов.

УДК. 621.38

QAMMA ŞÜALANMANIN $Cd_{1-x}Fe_xTe$ EPİTAKSİAL TƏBƏQƏLƏRİNİN KRİSTAL QURULUŞUNA TƏSİRİA.A.ABDULLAYEVA
Azərbaycan Texniki Universiteti

$Cd_{1-x}Fe_xTe$ ($x=0.05$) epitaksial təbəqələrin inkristal quruluşunun və səth morfoloqiyasının γ -şüalanmanın təsirindən əvvəl və sonra SEM və XRD tədqiqatları aparılmışdır. Şüalanmadan sonra epitaksial təbəqənin rənginin dəyişməsi və qara ləkələrin yaranması müşahidə edilir ki, bu da γ -kvantların şüalanma zamanı yolundakı atomlarla qarşılıqlı təsirinin nəticəsində baş verə bilər. γ - şüalanmadan sonra nümunələrin XRD spektrlərində dəyişikliklər yaranır, reflekslərin intensivliyi dəyişir, əksər kristal istiqamətlərdə intensivliklərin artması müşahidə edilir və müəyyən kristalloqrafik istiqamətlərdə zəif intensivliyə malik yeni reflekslər yaranır. $D\gamma = 220$ Qr dozada şüalanmadan sonra isə kristal quruluş, demək olar ki, bərpa olunur.

Acar sözlər: Epitaksial təbəqə, yarımmaqnit yarımqeçirici, SEM, XRD, γ -şüalanma.

Yeni xassəli yarımqeçirici materialların alınması, onların fiziki xassələrinin tədqiqi, məqsədyönlü idarə edilməsi və cihazqayırmada tətbiq imkanlarının müəyyən edilməsi müasir materialşünaslığın qarşısında duran mühüm məsələlərdən biridir.

$Cd_{1-x}Fe_xTe$ yarımmaqnit yarımqeçiricilərinin (YMY) həcmi kristalları müasir cihazqayırmada, xüsusilə günəş elementləri, radiasiya detektorları, İQ detektorlar, fotodetektorlar, optik izolyatorlar və s. uğurlu tətbiqini tapmışdır. Buna baxmayaraq bu gün müasir elektronikanı nazik təbəqələr olmadan təsəvvür etmək mümkün deyil. Cihazlar kristalların səthində yaradıldığından və bütün struktur dəyişikliklər cihazların parametrlərində əks olunduğundan, müəmməl kristal quruluşa və təmiz hamar səthə malik nazik təbəqələrin alınması tələb olunur.

Digər tərəfdən sabit fiziki xüsusiyyətlərə malik radiasiyaya davamlı və radiasiyaya həssas materialların alınması müasir fizikanın aktual problemlərdən biridir. Qeyd etmək lazımdır ki, müəyyən şəraitdə ionlaşdırıcı şüalanmanın ən güclü təsirinə məruz qalan materiallar, tərkibindəki radiasiya defektlərinin əmələ gəlməsi səbəbindən fiziki xüsusiyyətlərini dəyişdirir. Buna görə də ionlaşdırıcı şüalanmanın yarımqeçiricilərin fiziki xassələrinə təsirinin öyrənilməsi aktual məsələ sayılır.

Beləliklə, A^{II}B^{VI} tipli yarımkəçiricilər qrupuna daxil olan Cd_{1-x}Fe_xTe yarımaqnit yarımkəçiricilərinin epitaksial təbəqələri fundamental tədqiqatlar və praktiki tətbiq üçün xüsusi əhəmiyyət kəsb edən materiallardan sayılır [1-5]. Onların fiziki xasələrinin tədqiqinə ədəbiyyatda az sayda iş həsr edilmişdir. Təqdim olunan işdə Cd_{1-x}Fe_xTe (x=0.05) bərk məhlullarının epitaksial təbəqələrinin kristal quruluşuna və səth morfologiyasına γ-şüalanmanın təsiri tədqiq edilmişdir.

Eksperimental tədqiqatlar

Elektron cihazların xarakteristikaları əsasən kristalların səth morfologiyası ilə bağlı olduğundan, onlarda səth diqanostikasına xarici təsirlərin (temperatur, təzyiqlər, işıqlanma, radiasiya şüaları və s.) öyrənilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Ədəbiyyatdan məlumdur ki, yarımkəçirici materialların modifikasiyası üçün ən əlverişli üsullardan biri də radiasiya texnologiyalarıdır. Belə ki, ionlaşdırıcı şüaların təsiri ilə materialların fiziki xassələrini idarə etmək və onlar əsasında hazırlanacaq cihazların xarakteristikalarını əvvəlcədən proqnozlaşdırmaq mümkün olur. Bu baxımdan γ-şüalanmanın təsiri nəticəsində Cd_{1-x}Fe_xTe epitaksial təbəqələrinin səthində gedən dəyişikliklərin öyrənilməsi və ilkin nümunələrlə müqayisə edilməsi böyük maraq kəsb edir. İşdə ilkin və γ-şüalanmanın (Dγ=50 kQr) təsirinə məruz qalmış Cd_{1-x}Fe_xTe(x=0.05) epitaksial təbəqələrinin SEM və XRD tədqiqatlarının nəticələri verilmişdir.

γ-şüalanmanın Cd_{1-x}Fe_xTe (x = 0.08) epitaksial təbəqələrinin səth morfologiyasına təsirini öyrənmək üçün SEM metodundan istifadə edilmişdir (şəkl. 1). Tədqiqatlar JEOL JSM-7600F Field Emission Skan Elektron Mikroskopunda aparılmışdır.



a)

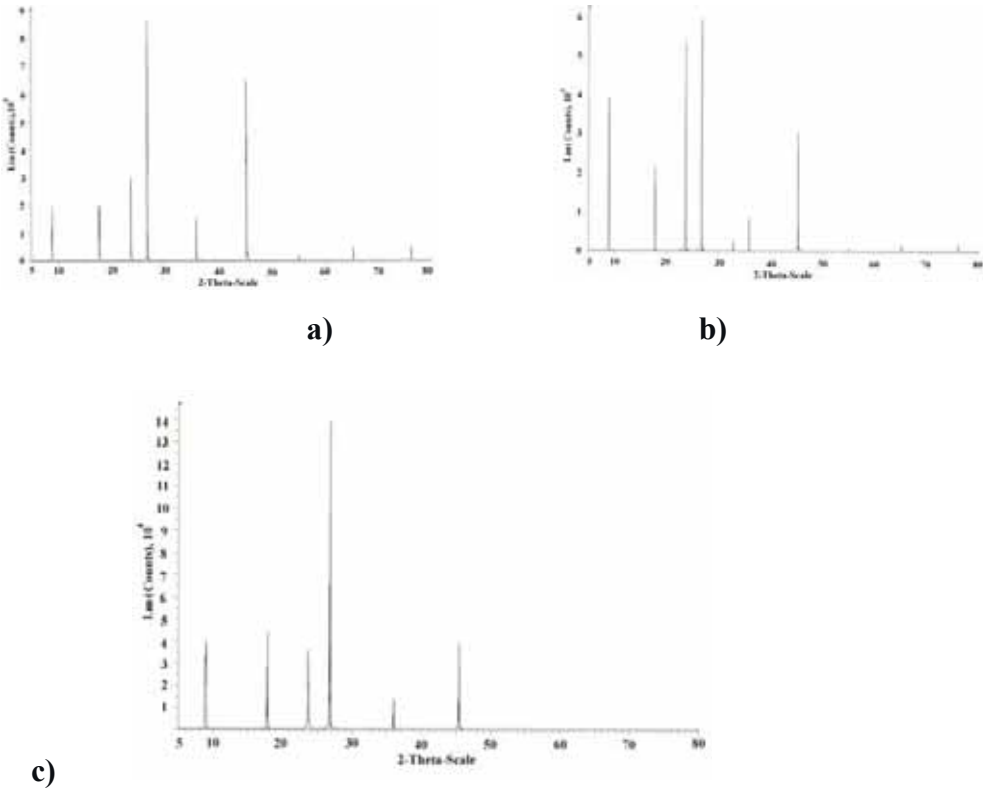
b)

Şəkl.1. Cd_{1-x}Fe_xTe (x=0.05) epitaksial təbəqələrinin səth morfologiyasının SEM şəkilləri:
a) Dγ=0. b) Dγ=50 kQr

γ-şüalanmanın Cd_{1-x}Fe_xTe (x=0.05) epitaksial təbəqələrinin səth morfologiyasına təsiri özünü səthdə təsadüfi deformasiyaların yaranmasında göstərir. Şüalanmadan sonra epitaksial təbəqənin rənginin dəyişməsi və qara ləkələrin yaranması müşahidə edilir. Udulan doza ilə epitaksial təbəqənin səthində müşahidə olunan deformasiya ləkələrinin paylanması arasında sistematik bir əlaqə

mövcud deyildir. Şək.1,a göstərir ki, alınmış nümunə hamar, güzgü səth morfolojiyasına malik olmuşdur. Şək.1,b $D\gamma=50\text{kQr}$ dozada γ -kvantlarla şüalanmış $\text{Cd}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Te}$ ($x=0.05$) epitaksial təbəqələrinin kobud və ləkələnmiş səthini göstərir ki, bu da γ -kvantların şüalanma zamanı yolundakı atomlarla qarşılıqlı təsirinin nəticəsində baş vermişdir.

γ - şüalanmanın ($E = 1.17 \text{ MeV}$, $E = 1.33 \text{ MeV}$) $\text{Cd}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Te}$ nazik polikristal təbəqələrinin kristal quruluşuna təsiri (şək.2) verilmişdir. Tədqiqatlar əsasında müəyyən edilmişdir ki, γ - şüalanmadan sonra nümunələrin rentgen difraksiya spektrlərində dəyişikliklər yaranır. $\text{Cd}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Te}$ nazik təbəqələri 2 dəfə şüalandırılmışdır. $D\gamma = 120 \text{ Qr}$ dozada ilk şüalanmadan sonra rentgen diffraktometrik spektrlərində dəyişikliklər olduğu nəzərə çarpır, reflekslərin intensivliyi dəyişir, əksər kristal istiqamətlərdə intensivliklərin artması müşahidə edilir və müəyyən kristalloqrafik istiqamətlərdə zəif intensivliyə malik yeni reflekslər yaranır (şək.2, b).



Şək.2. $\text{Cd}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Te}$ ($x = 0,05$) nazik polikristal təbəqələrinin rentgen diffraktometrik görüntüləri a) $D\gamma=0$, b) $D\gamma = 120 \text{ Qr}$, c) $D\gamma = 220 \text{ Qr}$

Daha sonra əlavə olaraq $D\gamma = 220 \text{ Qr}$ dozada ikinci şüalanmadan sonra kristal quruluş, demək olar ki, bərpa olunur (şək.2,c) və zəif intensivliyi olan bəzi reflekslər tamamilə yox olur. Şüalanmadan sonra rentgen difraksiya spek-

trlərindəki dəyişikliklər şüalanmanın kristal quruluşa təsiri kimi izah edilə bilər.

Nəticələr

İşdə $Cd_{1-x}Fe_xTe$ ($x=0.05$) bərk məhlullarının epitaksial təbəqələrinin kristal quruluşuna və səth morfoloqiyasına γ -şüalanmanın təsiri skan elektron mikroskop və rentgen difraktometrik metodlarla tədqiq edilmişdir. Şüalanmadan sonra epitaksial təbəqənin rənginin dəyişməsi və qara ləkələrin yaranması müşahidə edilir ki, bu da γ -kvantların şüalanma zamanı yolundakı atomlarla qarşılıqlı təsirinin nəticəsində baş verə bilər. Müəyyən edilmişdir ki, γ -şüalanmadan sonra nümunələrin rentgen difraksiya spektrlərində dəyişikliklər yaranır. Belə ki, reflekslərin intensivliyi dəyişir, əksər kristal istiqamətlərdə intensivliklərin artması müşahidə edilir və müəyyən kristalloqrafik istiqamətlərdə zəif intensivliyə malik yeni reflekslər yaranır. $D\gamma = 220$ Qr dozada şüalanmadan sonra kristal quruluş, demək olar ki, bərpa olunur.

ƏDƏBİYYAT

1. Жуковски П., Партыка Я., Венгерэк П., Колтунович Т., Сидоренко Ю., Стельмах В., Лапчук Н. Проводимость на переменном токе и электронный парамагнитный резонанс соединений $Cd_{1-x}Fe_xTe$. // Физика и техника полупроводников, 2007, т.41, в.5, с.544-548
2. Kisiel A. X-ray absorption near edge structure analysis of CdFeTe: XANES experiment and theoretical LMTO calculations. / Solid State Communications.v.. 81, i.2, 1992, p.151–154
3. Testelin C., Rigaux C., Mycielski A., Menant M., Guillot M. Exchange interactions in CdFeTe semimagnetic semiconductors. / Solid State Communications, v.78, i.7, 1991, p. 659–663
4. Нуриев И.Р., Назаров А.М., Mehrabova М.А., Садыгов Р.М. Особенности роста, структура и морфология поверхности эпитаксиальных пленок $Cd_{1-x}Mn_xTe$ // Журнал Неорганические Материалы, 2016, т.52, №9, с.1-4
5. М.А.Мehrabova, Н.Р.Нuriyev, Н.С.Orujov, Н.Н.Насанов, Т.И.Керимова, А.А.Абдуллаева, А.И.Казимова. Effect of gamma irradiation on conductivity of $Cd_{1-x}Fe_xTe$. ФТТ, 2019, №12, p. 2306–2309.

ВЛИЯНИЕ ГАММА ИЗЛУЧЕНИЯ НА КРИСТАЛЛИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ ЭПИТАКСИАЛЬНЫХ СЛОЕВ $Cd_{1-x}Fe_xTe$

А.А.АБДУЛЛАЕВА

РЕЗЮМЕ

Исследования СЭМ и РФА были выполнены до и после воздействия γ -излучения на кристаллическую структуру и поверхностную морфологию эпитаксиальных слоев $Cd_{1-x}Fe_xTe$ ($x = 0,05$). Наблюдается изменение цвета эпитаксиального слоя и появление черных пятен, а это может произойти в результате взаимодействия γ -квантов с атомами во время излучения. После γ -излучения происходит изменение в спектрах РФА образцов, меняется интенсивность рефлексов, в большинстве кристаллографических направлениях наблюдается увеличение интенсивности появления новых рефлексов со слабой интенсивностью. После облучения дозой $D\gamma = 220$ Грей кристаллическая структура практически восстанавливается.

Ключевые слова: эпитаксиальный слой, полумагнитный полупроводник, СЭМ, РФА, γ -излучение

EFFECT OF GAMMA RADIATION ON CRYSTALLINE STRUCTURE OF EPITAXIAL LAYERS Cd_{1-x}Fe_xTe

A.A.ABDULLAYEVA

SUMMARY

SEM and XRD studies were performed before and after exposure to γ -radiation on the crystal structure and surface morphology of the epitaxial layers of Cd_{1-x}Fe_xTe ($x = 0.05$). A change in the color of the epitaxial layer and the appearance of black spots are observed; this can occur as a result of the interaction of γ -quanta with atoms during radiation. After γ -radiation, there is a change in the XRD spectra of the samples, the intensity of the reflections changes; in most crystallographic directions, an increase in intensity and the appearance of new reflections with a weak intensity are observed. After irradiation with a dose of $D\gamma = 220$ Gray, the crystal structure is practically restored.

Keywords: epitaxial layer, semi-magnetic semiconductor, SEM, XRF, γ -radiation

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Mirzəyev S.S., Ağayeva G.A. İkitərtibli elliptik tip operator-diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin həll olunması haqqında	5
Quliyev R.M., Mirzəyev F.Ə. Situasiyaların qeyri-müəyyənliyi şəraitlərində qərar qəbul etməyə sistemli yanaşma haqqında	14
Sadıqov M.A., Sadıqov A.M. Axtarılan funksiyanın ikinci tərtib törəməsi daxil olan variasiya məsələsi, I	23
Həsənli A.M., Məmmədova L.İ., Nəbiyev İ.M. Yarımayırılan sərhəd şərtli Dirak sisteminin bərpasının yeganəliyi	32
Çayır H., Sultanova T. Kotoxunan laylanmada inteqrallanma və operatorlar haqqında bəzi qeydlər	39
Əliyev N.Ə., Məmmədov A.M. Üçüncü tərtib diskret additivo-poverativo-multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin araşdırılması.....	53

MEXANİKA

Mehdiyev M.F., Fətullayeva L.F., Fomina N.İ., Xəlilova L.H. Qeyri-xətti elastiki, eksentrik halqanın limit vəziyyətinin təyini	58
Sevdimaliyev Y. Paylanmış yükün təsirindən çoxlaylı nazik qalınlıqlı örtüyün sürüncəklik halında qabarması	67
Rəhimova K.R., Əliyev A.B. Özlü elastiki sıxılmayan mayenin yarım sonsuz özlü elastiki, dəyişən en kəsikli boruda döyünən axını	76

FİZİKA

Fiqarova S.R., Mahmudov M.M. Güclü maqnit sahəsində ifratqəfəslərdə keçiricilik elektronlarının fononlardan zonaarası və zonadaxili səpilməsi zamanı relaksasiya müddəti.....	92
Rəcəbov M.R. Fotonların xətti və müonların uzununa polyarizasiyasını nəzərə almaqla kristallarda müon-foton leysanının kaskad nəzəriyyəsi	102

Məmmədzadə A.C., Əliyev M.N.

Yarımmaqnit yarımkəçiricilərdə aşağı temperatur və paramaqnit zərrəciklərin yüksək konsentrasiyasında nüvə maqnit rezonans əyrisinin hesablanması 108

Bədəlov V.H.

Kleyn–Qordon tənliyinin ümumiləşmiş Vud–Sakson potensialı üçün həlli 115

Ağayeva L.N., Hacıyeva Ş.N., Əhmədov N.F., Əhmədov N.A.

Kazoksin B molekulunun nəzəri konformasiya analizi 124

Nəsirov E.F.

Nanoquruluşlu p-Si/n-ZnSSe heteroqəçidinin elektrik xassələri 133

Nuriyeva S.Q., Kərimova A.H.

ZnS və Ag₂S əsaslı nanosistemlərin quruluşu və fotolüminessensiya xüsusiyyətləri 142

Abdullayeva A.A.

Qamma şüalanmanın Cd_{1-x}Fe_xTe epitaksial təbəqələrinin kristal quruluşuna təsiri 156

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Мирзоев С.С., Агаева Г.А.

О разрешимости одной краевой задачи для эллиптического операторно–дифференциального уравнения второго порядка..... 5

Кулиев Р.М., Мирзоев Ф.А.

О системном подходе принятия решений в условиях неопределённости Ситуаций..... 14

Садыгов М.А., Садыгов А.М.

Вариационная задача содержащая вторые производные неизвестных функций, I 23

Гасанли А.М., Маммадова Л.И., Набиев И.М.

Единственность восстановления системы Дирака с полураспадающимися граничными условиями 32

Чайыр Х., Султанова Т.

Некоторые замечания об условиях интегрируемости и операторах кокасательного расслоения 39

Алиев Н.А., Маммедзаде А.М.

Исследования решений граничных задач и уравнений Коши третьего порядка дискретно аддитивных поверативных мультипликативных производных 53

МЕХАНИКА

Мехтиев М.Ф., Фатуллаева Л.Ф., Фомина Н.И., Халилова Л.Г.

Определение предельного состояния нелинейно-упругого эксцентрического кольца 58

Севдимальев Ю.

Выпучивание многослойной тонкостенной оболочки при ползучести под действием распределенной нагрузки 67

Алиев А.Б., Рагимова К.Р.

Вязкое течение вязкой упругой несжимаемой жидкости в полубесконечной вязкой упругой трубе переменного сечения. 76

ФИЗИКА

Фигарова С.Р., Махмудов М.М.

Время релаксации при межзонном и внутризонном рассеянии электронов проводимости на фонах в сверхрешетках в сильном магнитном поле..... 92

Раджабов М.Р.	
Каскадная теория мюонно-фотонного ливня в кристаллах с учетом линейных поляризаций фотонов и продольных поляризаций мюонов	102
Маммедзаде А.С., Алиев М.Н.	
Расчет кривой ядерного магнитного резонанса при низких температурах и высоких концентрациях парамагнитных частиц в полумагнитных полупроводниках	108
Бадалов В.Г.	
Решение уравнения Клейна–Гордона для обобщенного потенциала Вудса–Саксона	115
Агаева Л.Н., Гаджиева Ш.Н., Ахмедов Н.Ф., Ахмедов Н.А.	
Теоретический конформационный анализ молекулы казоксина В	124
Насиров Э.Ф.	
Электрические свойства наноструктурированного гетероперехода p-Si/n-ZnSSe	133
Нуриева С.Г., Каримова А.Х.	
Структура и фотолюминесцентные свойства наносистем на основе ZnS и Ag ₂ S.	142
Абдуллаева А.А.	
Влияние гамма излучения на кристаллическую структуру эпитаксиальных слоев Cd _{1-x} Fe _x Te.....	156

CONTENTS

MATHEMATICS

- Mirzeyev S.S., Agayeva G.A.**
Solvability One Boundary Value Problem Elliptic Operator-Differential Equations Of The Second Order 5
- Khuliyev R.M., Mirzayev F.A.**
On a system approach to decision making under uncertainty of situations 14
- Sadygov M.A., Sadygov A.M.**
Variation problem containing second derivatives of unknown functions, I. 23
- Hasanli A.M., Mammadova L.I., Nabiyev I.M.**
Uniqueness of recovery of the dirak system with semi-separated boundary conditions..... 32
- Çayır H., Sultanova T.**
Some Notes on Integrability Conditions and Operators on Cotangent Bundle..... 39
- Aliyev N.A., Mammadzade A.M.**
Investigation of the solution of Cauchy and boundary problems for the third order discrete additive-poverative-multiplicative derivative equation..... 53

MECHANICS

- Mekhtiyev M.F., Fatullayeva L.F., Fomina N. I., Khalilova L.H.**
Determination of the limit state of a nonlinear elastic eccentric ring. 58
- Sevdimaliyev Y.**
Buckling of a multilayer thin-walled shell during creep under the action of a distributed load. 67
- Aliyev A.B., Rahimova K.R.**
Viscous flow of viscous elastic incompressible fluid in a semi-infinite viscous elastic, variable cross-sectional tube 76

PHYSICS

- Figarova S.R., Mahmudov M.M.**
Relaxation time for interband and intraband scattering of conduction electrons by phonons in superlattices in a strong magnetic field..... 92
- Rajabov M.R.**
Cascade theory of muon-photon shower in crystals with the linear polarization of photons and the longitudinal polarization of muons..... 102

Mammadzade A.C., Aliyev M.N. Calculation of nuclear magnetic resonance curve in semimagnetic semiconductors at low temperatures and high concentration of paramagnite particles	108
Badalov V.H. Solution of the Kleyn–Gordon equation for the generalized Woods–Saxon potential	115
Agayeva L.N., Gadjiyeva Sh.N., Akhmedov N.F., Akhmedov N.A. Theoretical conformational analysis casoxin B molecules	124
Nasirov E.F. Electrical properties of nanostructured p-Si/n-ZnSSe heterojunction.....	133
Nuriyeva S.G., Karimova A.H. Structure and Photoluminescence Properties of ZnS and Ag ₂ S Based Nanosystems.....	142
Abdullayeva A.A. Effect of gamma radiation on crystalline structure of epitaxial layers Cd _{1-x} FexTe	156